MÜHENDİSLİK MATEMATİĞİ DERS NOTLARI

1. VEKTÖR ANALİZİ

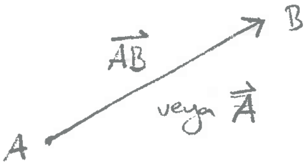
Elektromanyetik (EM) alanlarda karşımıza çıkan büyüklükler ikiye ayrılır. Bunlar; skaler ve vektörlerdir. EM teorideki kavramların anlaşılması için vektör cebri ve vektör hesabının bilinmesi gerekir.

1.1 SKALER ve VEKTÖRLER

Tam olarak sayı ve birim kullanılarak ifade edilebilen büyüklüklere **skaler** denir. Kütle, zaman, sıcaklık, enerji, uzunluk gibi büyüklükler skalerdir.

Büyüklüğünün yanında yönü ve doğrultusu da olan büyüklüklere ise **vektör** denir. Kuvvet, hız, ivme, yer değişimi, moment gibi büyüklükler vektördür.

Bir vektörü, uzayda A ve B gibi iki noktayı uygun bir skaler büyüklüğe eşit bir çizgi parçası şeklinde birbirine bağlayan oklar olarak düşünebiliriz.



Vektörler başlangıç ve bitiş noktalarının peşpeşe yazılarak üzerine ok yerleştirilerek ($\vec{AB}$) ya da vektör isminin üzerine ok (ya da şapka) yerleştirilerek ($\vec{A}$ veya $\hat{A}$) gösterilebilir.

Bir vektörün başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki mesafeye vektörün **büyüklüğü, uzunluğu** veya **normu** denir.

Aynı yöne ve büyüklüğe sahip vektörlere **eşit vektörler** denir.

Büyüklüğü sıfıra (0) eşit vektöre **sıfır vektörü** denir. Büyüklüğü bir (1) birim uzunluğunda olan vektöre de **birim vektör** denir. Tüm vektörler birim vektör ile de temsil edilebilir.

$$\vec{A} = \overbrace{A}^{\text{büyüklük}}\underbrace{\vec{a}_A}_{\text{birim vektör}}$$

Burada A, $\vec{A}$ vektörünün büyüklüğüdür ve birimi $\vec{A}$ ile aynıdır. Ayrıca,

$A = |\vec{A}|$ ile verilen bir skalerdir.

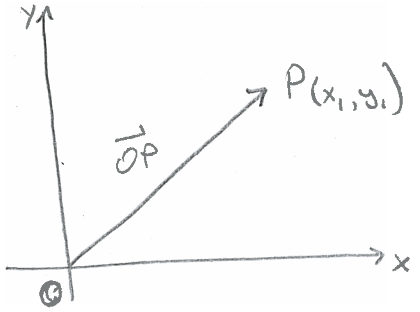
$\vec{a}_A$ ise, birim büyüklüğe sahip, yönü $\vec{A}$ vektörü ile aynı doğrultuda birim vektördür. $\vec{a}_A$;

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$$ ile bulunabilir.

1.1.1 Koordinat Düzleminde Vektörler

Bir vektörü analitik olarak tanımlamak için bu vektörün 2 yada 3 boyutlu koordinat düzleminde ifade edilmesi gerekir.

Eğer 2-boyutlu xy koordinat düzlemini incelersek,

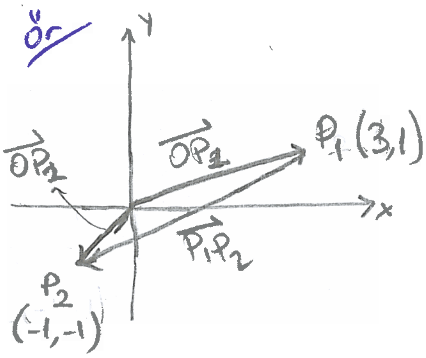


burada "O" başlangıç noktası orijini yani "x" ve "y" değerlerinin sıfır olduğu noktayı gösterir. $\overrightarrow{OP}$ vektörü ise, başlangıcı orijin bitişi $P(x_1, y_1)$ noktası olan **konum vektörüdür.**

Başlangıç noktası orijin olmayan vektörlere de **yer değiştirme** vektörü denir.

Yer değiştirme veya konum vektörleri elde edilirken, vektörün koordinat sistemindeki yönlerde başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki fark ile gösterilir.

Ör/



$$\overrightarrow{OP_1} = (3-0)\hat{a}_x + (1-0)\hat{a}_y = 3\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\hat{a}_x$ ve $\hat{a}_y$ x ve y yönlerindeki birim vektörlerdir.

$$\overrightarrow{OP_2} = (-1-0)\hat{a}_x + (-1-0)\hat{a}_y = -\hat{a}_x - \hat{a}_y \quad \text{olur}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1-3)\hat{a}_x + (-1-1)\hat{a}_y = -4\hat{a}_x - 2\hat{a}_y$$

Bu üç vektörün büyüklük ve birim vektörlerini hesaplayalım.

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \qquad \vec{a}_{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OP_1}}{|\overrightarrow{OP_1}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{a}_x + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{a}_y$$

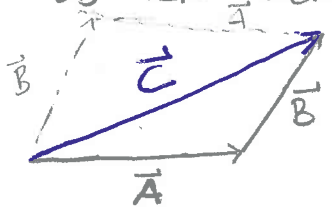
$$|\overrightarrow{OP_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad \vec{a}_{OP_2} = \frac{\overrightarrow{OP_2}}{|\overrightarrow{OP_2}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_y$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \qquad \vec{a}_{P_1P_2} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{-4}{\sqrt{20}}\hat{a}_x - \frac{2}{\sqrt{20}}\hat{a}_y$$

Devrilmeye karşı güvensiz olanlar için yapılır 60 dk.

1.2 VEKTÖRLERDE TOPLAMA ve ÇIKARMA

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki farklı vektör olsun. Bu vektörler toplanırken bir vektörün bitişi ile diğer vektörün başlangıcına gelecek şekilde birleştirilirse ilk vektörün başlangıcı ile diğer vektörün bitiş noktaları arasındaki vektör bu iki vektörün toplamıdır.



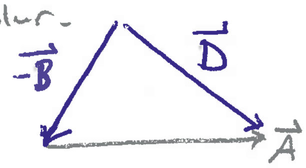
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Bir diğer şekilde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri bir paralel kenarın iki kenarı ise $\vec{C}$ toplam vektörü bu paralel kenarın köşegenidir.

Vektörlerde çıkarma ise, vektör toplamı cinsinden ifade edilebilir.

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Burada, $-\vec{B}$, $\vec{B}$ vektörünün negatifi yani başlangıç ve bitiş noktaları ters olanıdır. Yani bir vektörün tersi ($-\vec{B}$ gibi); o vektörün ($\vec{B}$) ile aynı büyüklükte ve ters yönde olur.



1.2.1 Vektörlerde Toplama Özellikleri

a) Değişme özelliği : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

b) Birleşme özelliği : $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

c) Dağılma özelliği : $k\,(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$

Not: $k \neq 0$ skaler olmak üzere bir vektörün bir skaler ile çarpımı o vektörün "k" katı uzunluğundaki vektörü verir. Elde edilen yeni vektör için $k > 0$ ise vektörle aynı yönde, $k < 0$ ise vektörle ters yöndedir.

1.3. VEKTÖRLERİN ÇARPIMI

İki vektörün çarpımında iki tanım vardır. Bunlardan birisi nokta veya skaler çarpım, diğeri ise çapraz ya da vektörel çarpımdır.

1.3.1. NOKTA (SKALER) ÇARPIM

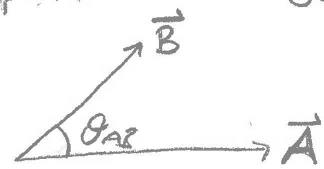
$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektörün skaler, veya nokta (noktasal) çarpımı: $\vec{A}.\vec{B}$ şeklinde gösterilir.

İki vektörün nokta çarpımı aynı yöndeki bileşen büyüklüklerinin çarpımlarının toplamına eşittir. Nokta çarpımın sonucu daima skalerdir.

Nokta çarpım, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin büyüklüklerinin ve iki vektör arasındaki açının kosinüsü ile çarpımına eşittir. Yani;

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta_{AB}$$

$$(0 \leq \theta_{AB} \leq \pi)$$



Nokta çarpımın özellikleri

a) Değişim özelliği : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

b) Toplamaya dağılım özelliği : $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

c) Boyutlandırma özelliği : $k(\vec{A}.\vec{B}) = (k\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(k\vec{B})$

Not-1: $B\cos\theta$ büyüklüğü $\vec{A}$ vektörü boyunca $\vec{B}$'nin bileşenidir. Bir başka deyişle $\vec{A}$'nın üzerindeki iz düşümüdür.

Not-2: Birbirine dik iki vektörün skaler (nokta) çarpımı sıfır (0)'a eşittir. Çünkü vektörler dik olursa aradaki açı 90° olur ve $\cos 90^\circ = 0$ olduğu için nokta çarpım sıfıra eşit olur.

Not-3: $\vec{A} \neq 0$ olmak kaydı ile $\vec{A}$ vektörünün büyüklüğü nokta çarpım ile gösterilebilir.

$$A = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}} = \sqrt{A\vec{a}_A . A\vec{a}_A} = \sqrt{A^2}$$

Görüldüğü gibi eşit iki vektörün çarpımında birim vektörler aynı yönde olduğu için aralarındaki açı 0° olur. Dolayısıyla açının kosinüsü "1" olur.

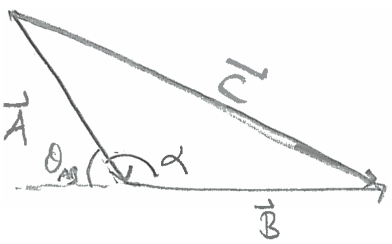
(A) Aynı yöndeki birim vektörlerin çarpımı '1' olurken, birbirine dik birim vektörlerin çarpımı "0" olur.

Örneğin; $\hat{a}_x . \hat{a}_x = 1$ iken $\vec{a}_x . \vec{a}_y = 0$ olur

Örnek Bir üçgen için kosinüs yasasını nokta çarpım ile ispatlayınız.

Kosinüs yasasında, bir kenar uzunluğu diğer iki kenar uzunluğu ve aralarındaki açı cinsinden veren skaler bir bağıntıdır.

$$C=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\alpha}$$



$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ şeklinde yazılabilir

$$C^2=\vec{C}\cdot\vec{C}=(A+B)\cdot(A+B)$$

$$=\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+2(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$=A^2+B^2+2AB\cos\theta_{AB}$$

Tanıma göre θ_{AB} vektörler arasındaki küçük açı olduğu için

$\cos\theta_{AB}=\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$ olur, ve

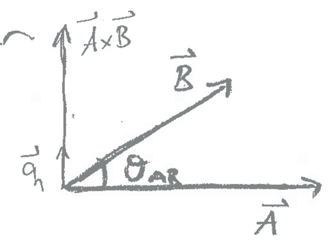
$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\alpha$$ bulunur.

1.3.2 VEKTÖREL (ÇAPRAZ) ÇARPIM

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{A}\times\vec{B}$ ile gösterilir. Vektörel çarpım ile $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'nin oluşturduğu düzleme normal bir vektör bulunur. Yani $\vec{A}\times\vec{B}$ ile $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerine ait düzleme dik bir vektör bulunur. Vektörel çarpım

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{a}_n\,|AB\sin\theta_{AB}|$$ ile ifade edilir.

Burada $\vec{a}_n$ normal birim vektörüdür ve yönü sağ el kuralı ile bulunur.



Sağ el kuralı; θ_{AB} açısı yönünde $\vec{A}$'dan $\vec{B}$'ye doğru sağ el parmakları yöneldiğinde baş parmağın gösterdiği doğrultudur.

Sağ el kuralına uyulduğunda

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ olduğu görülür. Yani vektörel çarpımda değişme özelliği yoktur.

Vektörel Çarpımın özellikleri

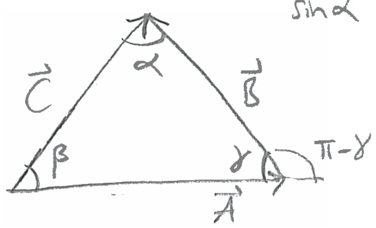
a) Dağılma özelliği $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

b) Boyutlandırma $k(\vec{A}\times\vec{B})=(k\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(k\vec{B})$

Not 1: Sıfır olmayan iki vektörün paralel olması için vektörel çarpımları "0" olmalıdır.

Örnek: Bir üçgen için sinüs kuralını vektörel çarpım ile gösteriniz

Sinüs kuralı: $\dfrac{A}{\sin\alpha} = \dfrac{B}{\sin\beta} = \dfrac{C}{\sin\gamma}$



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \vec{C} - \vec{A}$$

$$\vec{B} \times (\vec{C} - \vec{A}) = 0 \qquad (\vec{B} \times \vec{B} = 0 \text{ olduğu için})$$

Dağılma özelliği ile

$\vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \times \vec{A}$ olur. Burada büyüklükler eşit olmalı. Yani

$$BC\sin\alpha = BA\sin(\pi-\gamma) \qquad (\sin(\pi-\gamma) = \sin\gamma)$$

$\dfrac{C}{\sin\gamma} = \dfrac{A}{\sin\alpha}$ olur. Benzer şekilde $\dfrac{A}{\sin\alpha} = \dfrac{B}{\sin\beta}$ de bulunabilir

Dolayısıyla

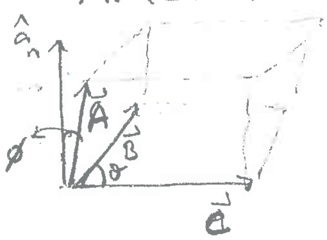
$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$ bulunur

1.3.3 ÜÇ VEKTÖRÜN ÇARPIMI

Üç vektörün 2 çeşit çarpımı vardır. Bunlar; skaler üçlü çarpım ve vektörel üçlü çarpımdır.

a) SKALER ÜÇLÜ ÇARPIM

$\vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C})$ şeklindeki çarpımdır



$$\vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{a}_n\, BC\sin\theta$$

$$= ABC\sin\theta\cos\phi$$ olarak hesaplanır

Bu üç vektör bir paralel prizmanın üç kenarını temsil ediyorsa sonuçta elde edilen skaler büyüklük hacimdir.

Özellik

$\vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A} \times \vec{B})$ özelliği vektörler periyodik sırada olduğu müddetçe geçerlidir.

b) VEKTÖREL ÜÇLÜ ÇARPIM

Bu çarpımda vektörel çarpım yapılan iki vektör sonrasında başka bir vektörle daha vektörel olarak çarpılır.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} \qquad \text{(Birleşme özelliği yoktur)}$$

Back-cab kuralı

Üçlü vektörel çarpım aynı zamanda iki vektörün farkı olarak da yazılabilir.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \qquad [BAC-CAB]$$

1.4 ORTOGONAL (DİK) KOORDİNAT SİSTEMLERİ

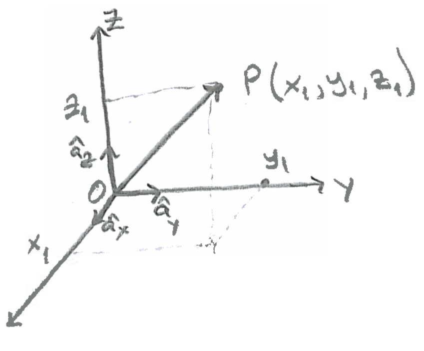
Üç boyutlu uzayda bir nokta, üç yüzeyin kesişmesi ile belirlenebilir. Bu üç yüzey $u_1=sbt$, $u_2=sbt$, $u_3=sbt$ şeklinde tanımlansın. Burada "u"ların hepsi uzunluk olmayabilir. Bu yüzeyler birbirine dik olursa sisteme ortogonal koordinat sistemidir. EM'de üç temel koordinat sistemi vardır. Bunlar;

i) Kartezyen (dikdörtgen) koordinat sistemi
ii) Silindirik " "
iii) Küresel " "

1.4.1 KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİ

Kartezyen koordinat sistemi birbirine dik üç düz çizgiden oluşan sistemdir. Bu üç çizgi x, y ve z eksenleri olarak bilinir.

Bu eksenlerin kesişim noktası orijindir. Üç koordinat yönündeki a_x, a_y, a_z birim vektörlerine **baz vektörler** denir.



Boşluktaki bir $P(x_1,y_1,z_1)$ noktası şekildeki gibi üç eksenin izdüşümleri ile tanımlanabilir. P noktasının konum vektörü;

$$\vec{OP} = \hat{a}_x x_1 + \hat{a}_y y_1 + \hat{a}_z z_1$$

Benzer şekilde bir $\vec{A}$ vektörü dik koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılır.

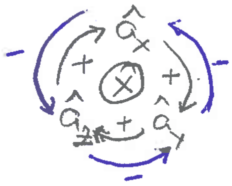
$$\vec{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$$

Kartezyen koordinat sisteminde sağ-el kuralı uygulanırsa;

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \qquad \hat{a}_y \times \hat{a}_x = -\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x \qquad \hat{a}_x \times \hat{a}_z = -\hat{a}_y$$

$$\hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \qquad \hat{a}_z \times \hat{a}_y = -\hat{a}_x$$



Aşağıdaki bağıntılar da yazılabilir

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = 0$$

$\vec{A}, \vec{B}$ ve $\vec{C}$ kartezyen koordinatlarda tanımlı üç vektör olsun. $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z \\ \vec{B} &= B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z \end{aligned}\right\rangle \vec{C} = (A_x + B_x)\vec{a}_x + (A_y + B_y)\vec{a}_y + (A_z + B_z)\vec{a}_z$$

olarak yazılabilir.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin nokta çarpımı:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

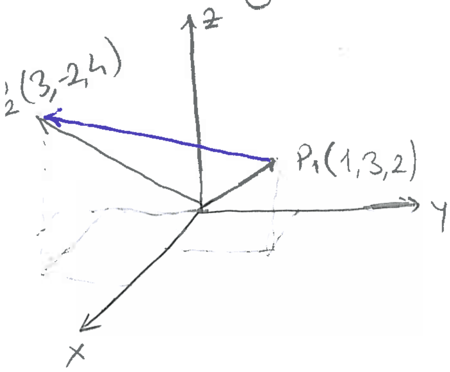
$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin vektörel çarpımı:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{a}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

$\vec{A}$ vektörünün büyüklüğü:

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Örnek-1 Dik koordinatlarda $P_1(1,3,2)$ noktasından $P_2(3,-2,4)$ noktasına giden vektörü yazın ve büyüklüğünü hesaplayın.



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (3\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 4\hat{a}_z) - (\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)$$

$$= 2\hat{a}_x - 5\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{33}$$

Örnek-2 $\vec{A}=3\hat{a}_x+2\hat{a}_y-\hat{a}_z$ ve $\vec{B}=\hat{a}_x-3\hat{a}_y+2\hat{a}_z$ verilmiş. $\vec{C}=2\vec{A}-3\vec{B}$'yi bulun ve $\hat{a}_c$ birim vektörünü bularak x, y ve z eksenleri ile yaptıkları açıyı bulunuz.

$$\vec{C}=2(3\hat{a}_x+2\hat{a}_y-\hat{a}_z)-3(\hat{a}_x-3\hat{a}_y+2\hat{a}_z)=3\hat{a}_x+13\hat{a}_y-8\hat{a}_z$$

$$C=\sqrt{3^2+13^2+(-8)^2}=\sqrt{242}=15{,}55$$

$$\vec{a}_c=\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}=\frac{3\hat{a}_x+13\hat{a}_y-8\hat{a}_z}{15{,}55}=0{,}193\hat{a}_x+0{,}836\hat{a}_y-0{,}514\hat{a}_z$$

$$\theta_x=\cos^{-1}\left(\frac{C_x}{C}\right)=\cos^{-1}(0{,}193)=78{,}9^\circ$$

$$\theta_y=\cos^{-1}\left(\frac{C_y}{C}\right)=\cos^{-1}(0{,}836)=33{,}3^\circ$$

$$\theta_z=\cos^{-1}\left(\frac{C_z}{C}\right)=\cos^{-1}(-0{,}514)=120{,}9^\circ$$

Örnek-3 $\vec{A}=4\hat{a}_x+6\hat{a}_y-2\hat{a}_z$ ve $\vec{B}=-2\hat{a}_x+4\hat{a}_y+8\hat{a}_z$ vektörlerinin dik olduğunu gösteriniz.

İki vektörün dik ($\perp$) olması demek skaler çarpımının sıfır (0) olmasıdır.

$$\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta_{AB}=0$$

$$\vec{A}.\vec{B}=4.(-2)+6.4+(-2).8=-8+24-16=0$$

Örnek-4 Üstteki vektörlerin vektörel çarpımını bulunuz.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ 4 & 6 & -2\\ -2 & 4 & 8\end{vmatrix}=\hat{a}_x(48-(-8))+\hat{a}_y(4-32)+\hat{a}_z(16-(-12))$$

$$=56\hat{a}_x-28\hat{a}_y+28\hat{a}_z=28(2\hat{a}_x-\hat{a}_y+\hat{a}_z)$$

Örnek-5 $\vec{A}=2\hat{a}_x+\hat{a}_y-2\hat{a}_z$, $\vec{B}=-\hat{a}_x+3\hat{a}_y+5\hat{a}_z$ ve $\vec{C}=5\hat{a}_x-2\hat{a}_y-2\hat{a}_z$ vektörleri ile biçimlenmiş bir prizmanın hacmini hesaplayınız.

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 5\\ 5 & -2 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 5 & -2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}$$

$$=57\ br^3$$

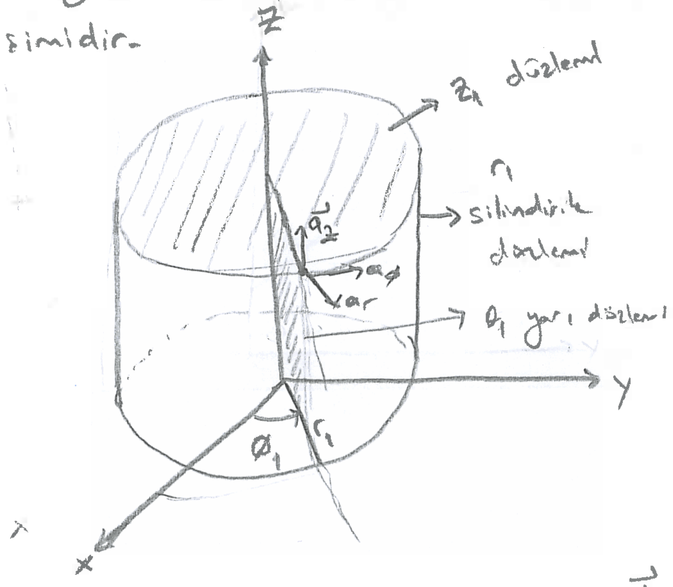
Not-1 Kartezyen koordinatlarda diferansiyel uzunluk ve hacim

$$dl=\hat{a}_x dx+\hat{a}_y dy+\hat{a}_z dz$$

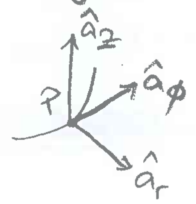
$$dV=dx\,dy\,dz$$

1.4.2 SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİ

Silindirik koordinatlarda tanımlı bir $P(r_1, \phi_1, z_1)$ olsun. Bu P noktası yarıçapı $(r) = r_1$ çembersel silindirik yüzeyin, dikeyde xy düzlemi ile $\phi = \phi_1$ açısını yapan yarı-düzlemin ve $z = z_1$'de xy düzlemine paralel düzlemin kesişimidir.



Burada ϕ açısı pozitif x ekseninden ölçülür ve $\hat{a}_\phi$ baz vektörü silindirik yüzeye teğettir.



Silindirik koordinatlarda bir $\vec{A}$ vektörü:

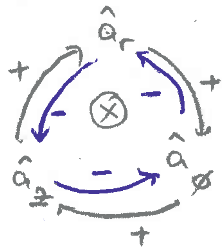
$$\vec{A} = \hat{a}_r A_r + \hat{a}_\phi A_\phi + \hat{a}_z A_z \quad \text{ile ifade edilir.}$$

Silindirik koordinatlarda vektörel çarpım ifadeleri:

$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z$$

$$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r$$

$$\hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\phi$$



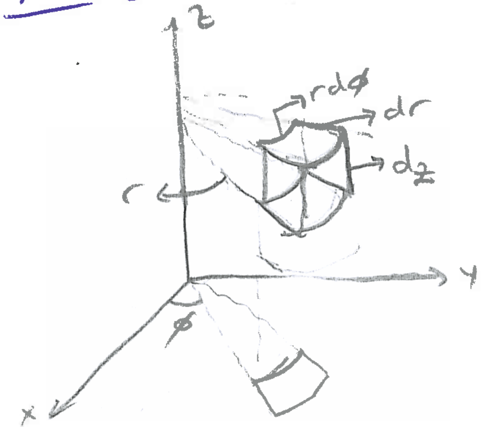
Silindirik koordinatlarda skaler çarpım ifadeleri:

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1 \qquad (\text{harici } "0" \text{ dır})$$

Bir $\vec{A}$ vektörünün uzunluğu

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$$

Not. Silindirik koordinatlarda diferansiyel uzunluk ve hacim

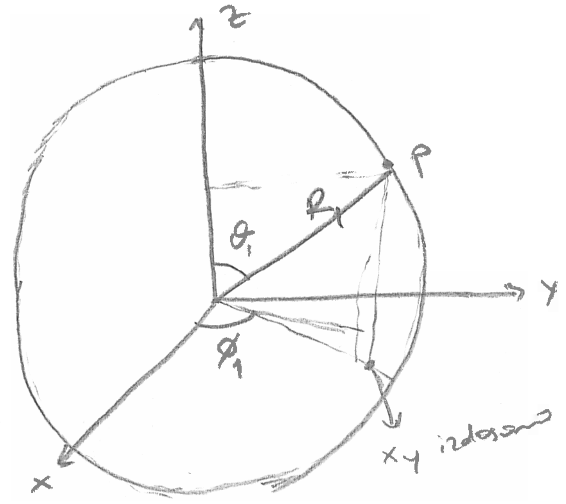


$$d\vec{l} = \hat{a}_r\,dr + \hat{a}_\phi\, r\,d\phi + \hat{a}_z\,dz$$

$$dV = r\,dr\,d\phi\,dz$$

1.4.3 KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMİ

Küresel koordinat sisteminde bir $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$ noktası; $R=R_1$ yarıçaplı bir küresel yüzey, köşesi orijinde olan z-ekseni ile $\theta=\theta_1$ açısı dik çemberse koni ve kenarı z ekseni ile çakışan xy düzlemi ile ϕ_1 açısı yapan yarı-düzlem kesişimidir.



Buradaki $\hat{a}_R$ orijinden P noktasına olan yarıçap uzunluğudur. "$\hat{a}_r$" ile karıştırmamak gerekir.

$\hat{a}_\phi$ baz vektörü $\phi=\phi_1$ düzleminde ve küresel düzleme teğettir.

Küresel koordinatlarda bir $\vec{A}$ vektörü:

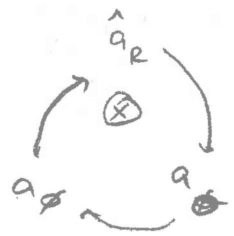
$$\vec{A} = \hat{a}_R A_R + \hat{a}_\theta A_\theta + \hat{a}_\phi A_\phi$$

Vektörel çarpım ifadeleri:

$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi$$

$$\hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_R$$

$$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta$$

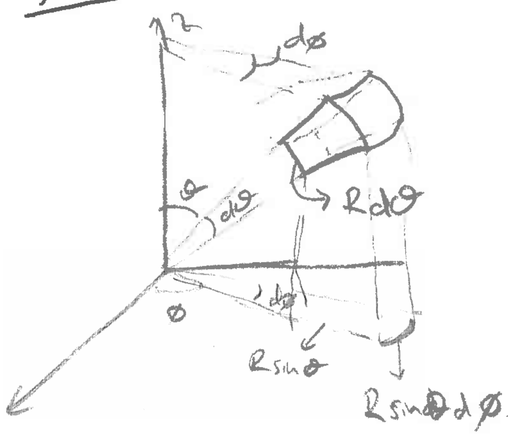


Skaler çarpım ifadeleri

$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_R = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = 1$$

$\vec{A}$ vektörünün uzunluğu: $\sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2}$

Not- Küresel koordinatlarda diferansiyel uzunluk ve hacim



$$\vec{dl} = \hat{a}_R dR + \hat{a}_\theta R d\theta + \hat{a}_\phi R\sin\theta d\phi$$

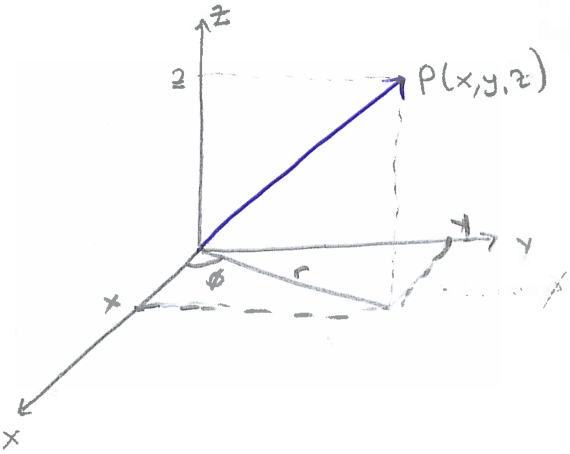
$$dv = R^2 \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\phi$$

1.5 KOORDİNAT SİSTEMLERİ ARASINDA DÖNÜŞÜMLER

Uzaydaki bir noktanın konumu koordinat sistemi seçiminden bağımsızdır. Yani noktanın konumu gösteriminde hangi koordinat sisteminin kullanıldığına bakılmaksızın aynıdır.

Fakat verilen bir problemin çözümünde bazı koordinat sistemleri diğerlerine göre daha kullanışlı olmaktadır. Böyle bir durumda problemin çözümü için bir koordinat sisteminden diğerine dönüşüm yapmak gerekebilir.

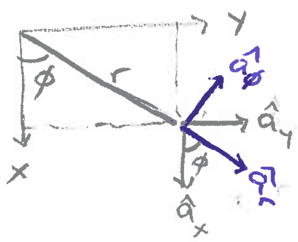
1.5.1 KARTEZYENDEN - SİLİNDİRİĞE DÖNÜŞÜMLERİ



Her iki koordinat sisteminde de "z" $(z=z)$ ortak koordinat düzlemidir. Şekilden

$$\left.\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \phi=\tan^{-1}(y/x) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi \end{array}\right.$$

olduğu görülmektedir.



Yandaki şekilden görüldüğü gibi;

$$\hat{a}_r\cdot\hat{a}_x=\cos\phi \qquad \hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_x=-\sin\phi$$

ve

$$\hat{a}_r\cdot\hat{a}_y=\sin\phi \qquad \hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_y=\cos\phi$$

olur.

Yani;

$$\hat{a}_r=\hat{a}_x\cos\phi+\hat{a}_y\sin\phi$$

$$\hat{a}_\phi=-\hat{a}_x\sin\phi+\hat{a}_y\cos\phi$$

olur.

Benzer şekilde ters dönüşümden

$$\hat{a}_x=\hat{a}_r\cos\phi-\hat{a}_\phi\sin\phi$$

$$\hat{a}_y=\hat{a}_r\sin\phi+\hat{a}_\phi\cos\phi$$

elde edilir.

Silindirik-kartezyen ve kartezyen-silindirik dönüşümlerinde aşağıdaki matris eşitlikleri kullanılabilir.

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_r\\A_\phi\\A_z\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}A_r\\A_\phi\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$

ÖRN $\vec{A} = \hat{a}_r (3\cos\phi) - \hat{a}_\phi 2r + \hat{a}_z z$ ile verilen bir vektör alanı verilmektedir.

a) $P(4, 60°, 5)$ noktasındaki alan değerini

b) P noktasını ve $\vec{A}_p$ alanını kartezyen koordinatlarda yazınız

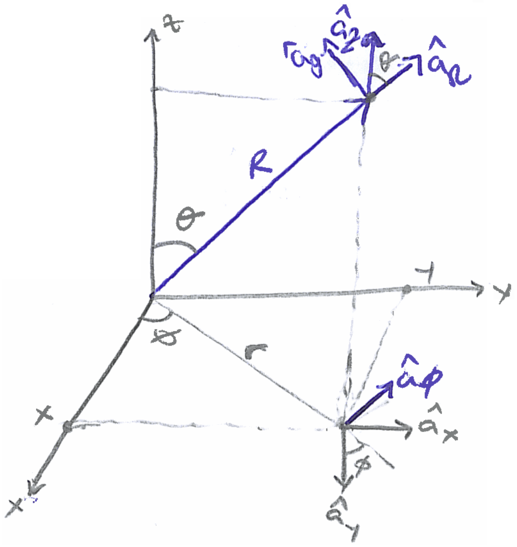
a) $\vec{A}_p(4,60°,5) = \hat{a}_r (3\cos 60°) - \hat{a}_\phi 8 + \hat{a}_z 5$

$$\vec{A}_p = \hat{a}_r \tfrac{3}{2} - \hat{a}_\phi 8 + \hat{a}_z 5$$

b)
$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° & 0 \\ \sin 60° & \cos 60° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{A}_{P(x,y,z)} = \hat{a}_x 7{,}68 + \hat{a}_y 2{,}7 + \hat{a}_z 5$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi = 4\cos 60° = 2 \\ y &= r\sin\phi = 2\sqrt{3} \\ z &= z = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{(r,\phi,z)}(4, 60°, 5) = P_{(x,y,z)}(2, 2\sqrt{3}, 5)$$

1.5.2 KARTEZYEN - KÜRESEL DÖNÜŞÜMLERİ



Yandaki şekilden şu eşitlikler elde edilir.

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ &\text{veya} \\ \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}\right.$$

Yine;

$$\hat{a}_R = \hat{a}_x \sin\theta\cos\phi + \hat{a}_y \sin\theta\sin\phi + \hat{a}_z \cos\theta$$

$$\hat{a}_\theta = \hat{a}_x \cos\theta\cos\phi + \hat{a}_y \cos\theta\sin\phi - \hat{a}_z \sin\theta$$

$$\hat{a}_\phi = -\hat{a}_x \sin\phi + \hat{a}_y \cos\phi$$

ve

$$\hat{a}_x = \hat{a}_R \sin\theta\cos\phi + \hat{a}_\theta \cos\theta\cos\phi - \hat{a}_\phi \sin\phi$$

$$\hat{a}_y = \hat{a}_R \sin\theta\sin\phi + \hat{a}_\theta \cos\theta\sin\phi + \hat{a}_\phi \cos\phi$$

$$\hat{a}_z = \hat{a}_R \cos\theta - \hat{a}_\theta \sin\theta$$

olur.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

ÖRN $\vec{A} = \hat{a}_x(x+y) + \hat{a}_y(y-x) + \hat{a}_z z$ vektörünü küresel koordinatlarda ifade edin

$$A_R = A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta$$

$$= (x+y)\sin\theta\cos\phi + (y-x)\sin\theta\sin\phi + z\cos\theta$$

$(x = R\sin\theta\cos\phi \quad y = R\sin\theta\sin\phi \quad z = R\cos\theta)$ dönüşümleri yapılırsa

$$A_R = (R\sin\theta\sin\phi + R\sin\theta\cos\phi)\sin\theta\cos\phi + (R\sin\theta\sin\phi - R\sin\theta\cos\phi)\sin\theta\sin\phi + R\cos^2\theta$$

$$= R\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{1} + R\cos^2\theta = R\sin^2\theta + R\cos^2\theta = \underline{\underline{R}}$$

Benzer şekilde

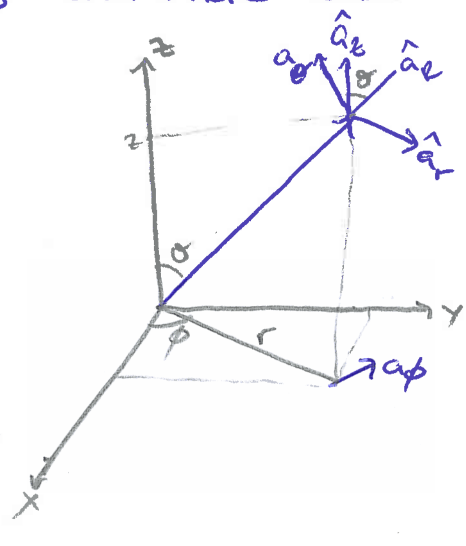
$$A_\theta = (x+y)\cos\theta\cos\phi + (y-x)\cos\theta\sin\phi - z\sin\theta = \underline{\underline{0}}$$

$$A_\phi = -(x+y)\sin\phi + (y-x)\cos\phi = \underline{\underline{-R\sin\theta}}$$

bulunur. Yani

$$\vec{A} = \hat{a}_R R - \hat{a}_\phi R\sin\theta \quad \text{olur}$$

1.5.3 SİLİNDİRİK – KÜRESEL DÖNÜŞÜMLERİ



"ϕ" her iki koordinat sisteminde de ortaktır

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2+z^2} \\ \theta &= \tan^{-1}(r/z) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} r &= R\sin\theta \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}\right.$$

olur

$$\hat{a}_R = \hat{a}_r \sin\theta + \hat{a}_z \cos\theta$$
$$\hat{a}_\theta = \hat{a}_r \cos\theta - \hat{a}_z \sin\theta$$
$$\hat{a}_\phi = \hat{a}_\phi$$

ve

$$\hat{a}_r = \hat{a}_R \sin\theta + \hat{a}_\theta \cos\theta$$
$$\hat{a}_\phi = \hat{a}_\phi$$
$$\hat{a}_z = \hat{a}_R \cos\theta - \hat{a}_\theta \sin\theta$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

ÖRN Silindirik koordinatlarda verilen $P(4, 2\pi/3, 3)$ noktasını küresel ve kartezyen koordinatlarda yazınız

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$
$$\theta = \tan^{-1}(r/z) = \tan^{-1}(4/3) = 53{,}1^\circ$$
$$\phi = \phi = 2\pi/3 = 120^\circ$$

ve

$$x = r\cos\phi = 4\cos 120^\circ = -2$$
$$y = r\sin\phi = 4\sin 120^\circ = 2\sqrt{3}$$
$$z = z = 3$$

$$P_{(r,\phi,z)}(4, 2\pi/3, 3) = P_{(R,\theta,\phi)}(5, 53{,}1^\circ, 120^\circ) = P_{(x,y,z)}(-2, 2\sqrt{3}, 3)$$

ÖRNEK Kartezyen koordinatları

$P(-2, 6, 3)$ noktasının silindirik ve küresel koordinat karşılığını bulunuz

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+6^2} = \sqrt{40} = 6{,}32$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(-3) = 108{,}43^\circ$$

$$z = z = 3$$

$$P(6{,}32,\ 108{,}4^\circ,\ 3)$$

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 7$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{40}}{3} = 64{,}6^\circ$$

$$\phi = \phi = 108{,}4^\circ$$

$$P(7,\ 64{,}6^\circ,\ 108{,}4^\circ)$$

ÖRN $\vec{A} = y\hat{a}_x + (x+z)\hat{a}_y$ vektörünü silindirik ve kartezyen dönüşümünü bulun

Silindir

$$\vec{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x+z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = (y\cos\phi + (x+z)\sin\phi)\hat{a}_r + (-y\sin\phi + (x+z)\cos\phi)\hat{a}_\phi + 0 \cdot \hat{a}_z$$

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \qquad z = z$$

$$\vec{A} = (r\sin\phi\cos\phi + (r\cos\phi + z)\sin\phi)\hat{a}_r + (-r\sin^2\phi + (r\cos\phi + z)\cos\phi)\hat{a}_\phi$$

Küresel

$$\vec{A} = (y\sin\theta\cos\phi + (x+z)\sin\theta\sin\phi)\hat{a}_R + (-y\cos\theta\cos\phi + (x+z)\cos\theta\sin\phi)\hat{a}_\theta$$
$$+ (-y\sin\phi + (x+z)\cos\phi)\, a_\phi$$

$$x = R\sin\theta\cos\phi \qquad y = R\sin\theta\sin\phi \qquad z = R\cos\theta$$