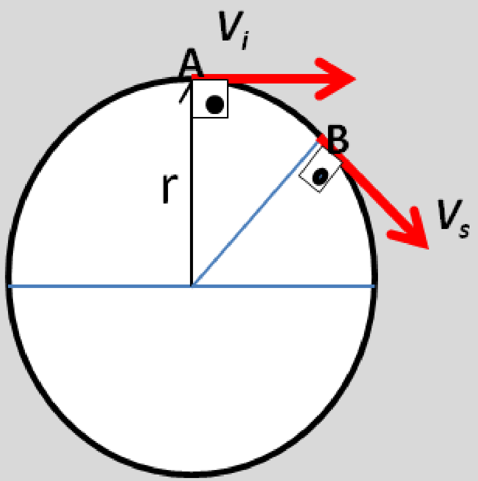
FİZİK

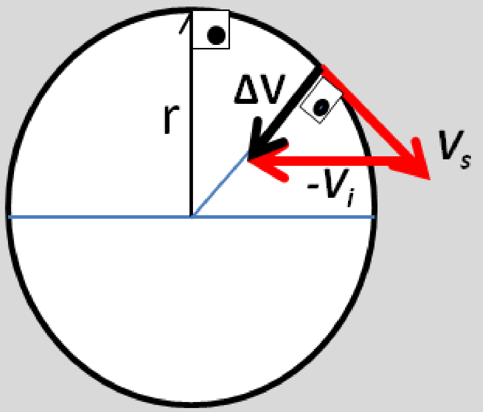
8.HAFTA

6. DAİRESEL HAREKET

6.1 Düzgün Dairesel Hareket:

Sabit v hızı ile dairesel yörüngede ilerleyen bir cismin hareketini ele alalım. Yol boyunca cismin hızının büyüklüğü daima sabittir. Fakat hız vektörü sürekli yön değiştirdiği için cismin ivmeli hareket ettiği söylenebilir. Dairesel bir yörüngede cismin hızının büyüklüğünün zamanla değişmediği bu harekete "***düzgün dairesel hareket***" denir. Dairesel yörüngede hareket eden bir cismin herhangi bir andaki hız vektörü daima dairesel yörüngeye teğet yani dairesel yörüngenin yarıçap doğrultusuna diktir. Şekil 5.1'de dairesel yörüngede hareket eden bir cismin A ve B noktalarındaki hız vektörleri dairesel yörüngeye teğet olarak çizilmiştir. Bu cismin ivme vektörünün yönü ise son *(B noktası)* ve ilk *(A noktası)* hız vektörlerinin farkı ile belirlenir. Şekilde görüldüğü gibi hız vektörlerinin büyüklükleri eşit olduğundan ΔV fark vektörünün $(\Delta V = V_s - V_i)$ ve cismin ivmesinin yönü daima dairesel yörüngenin merkezine doğru olacaktır. Bu tür ivmeye "***merkezcil (radyal) ivme***" adı verilir.





$\overrightarrow{a_r}$ ile ifade edilen merkezcil ivmenin büyüklüğü ise hız vektörünün büyüklüğünün karesi ile doğru orantılı, yörünge yarıçapı ile ters orantılıdır.

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{V^2}{r}$$

6.2. Düzgün Olmayan Dairesel Hareket:

Eğer dairesel hareket yapan cismin hızı vektörünün hem yönü hem de büyüklüğü zamanla değişiyor ise bu cismin "***düzgün olmayan dairesel hareket"*** yaptığı söylenir. Bu şekilde hareket eden bir cisim hem hızının büyüklüğündeki hem de yönündeki değişme nedeniyle iki farklı ivmeye sahip olur.

Teğetsel ivme: Cismin hızının büyüklüğündeki değişmeden kaynaklanır. Ani hız vektörüne paraleldir ve büyüklüğü

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{d\left|\vec{V}\right|}{dt}$$

İle verilir.

Radyal ivme: Cismin hız vektörünün doğrultusundaki değişmeden doğar ve büyüklüğü

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{V^2}{r}$$

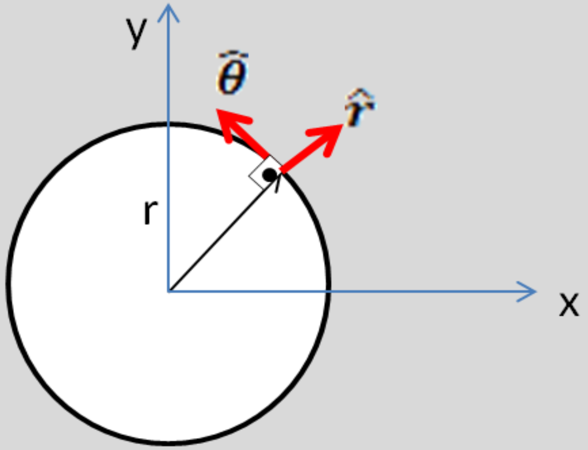
şeklindedir. Cismin toplam ivmesi ise radyal ve teğetsel ivme vektörlerinin vektörel toplamına eşittir.

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_r}$$

Dairesel yörüngede hareket eden bir cismin ivmesini polar koordinatlarda kullanılan $\hat{\boldsymbol{r}}$ ve $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ birim vektörleri ile yazmak daha uygundur.

$\hat{\boldsymbol{r}}$: Yarıçap vektörü boyunca uzanan ve dairenin merkezinden dışa doğru radyal olarak yönelen birim vektördür.

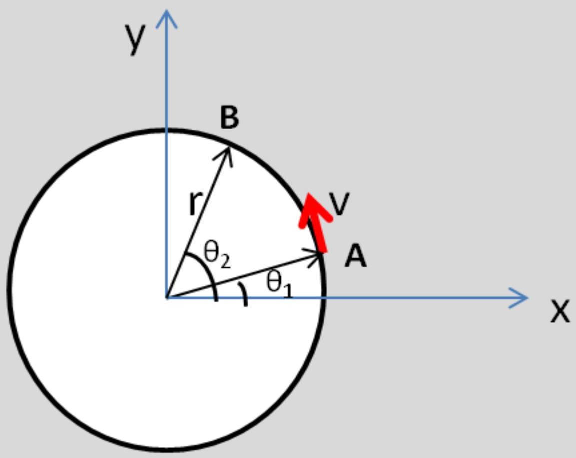
$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$: Daireye teğet birim vektördür.



Polar birim vektörler ile cismin toplam ivmesini aşağıdaki gibi yazabiliriz. Radyal ivmenin önündeki eksi işareti bu ivmenin yönünün daima dairenin merkezine doğru olmasından (yani $\hat{\boldsymbol{r}}$ ‘nin tersi yön) kaynaklanır.

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_r} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}\,\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{V^2}{r}\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

Dairesel yörüngede hareket eden bir cismin hareketi ile ilgili olarak tanımlanan önemli kavramlardan biri ***açısal hız (w)*** dır. Açısal hız, dairesel yörüngede hareket eden cismin birim zamanda yaptığı açısal yer değiştirme miktarı olarak tanımlanır. Açısal hızın birimi ise **rad/s'** dir. Şekildeki gibi v hızı ile A noktasından B noktasına ilerleyen bir cisim düşünelim.



Cismin açısal hızı, açısal yer değiştirme miktarının geçen zamanı oranı ile hesaplanır.

$$w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

Başlangıç anında zaman sıfır olarak alınırsa ($t_1 = 0$) açısal hız için

$$w = \frac{\Delta\theta}{t}$$

yazılabilir. Cismin dairesel yörünge üzerinde alacağı çizgisel yol miktarı (Δs)ise $\Delta\theta$ açı farkına karşılık gelen dairesel yay parçasının uzunluğuna eşit olur. Trigonometri bilgilerimizi kullanırsak, r yarıçaplı bir dairede $\Delta\theta$ açısının oluşturduğu yayın uzunluğu

$$\Delta s = r\,\Delta\theta$$

olur. Yukarıdaki ifade de açısal yerdeğiştirme yerine açısal hız kullanılırsa,

$$\Delta s = r\,w\,t$$

elde edilir.

Ayrıca cismin çizgisel hızının

$$v = \frac{\Delta s}{t}$$

olarak tanımlandığı düşünülürse, cismin çizgisel hızı ile açısal hızı arasındaki ilişki elde edilmiş olur.

$$v = r\,w$$

Bir dairesel yörüngede tam bir devir(dönüş) 2π radyan (360^0) karşılık gelir.

Periyot (T) : Cismin tam bir devir yapması için geçen süredir.

$$T = \frac{saniye}{devir}$$

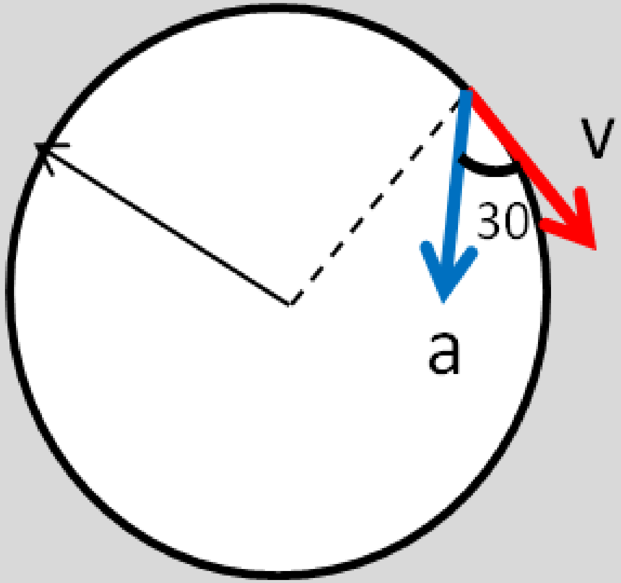
Frekans (f): Bir saniyedeki devir sayısıdır. Periyodun tersine eşittir.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{devir}{saniye}$$

Açısal hız ve periyot arasındaki ilişki ise şu şekildedir.

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Örnek 6.1: Belirli bir anda 2.5 m yarıçaplı bir dairenin çevresinde hareket eden bir cismin toplam ivme ve hız vektörü şekildeki gibidir. Cismin toplam ivme vektörünün büyüklüğü ise 15 m/s^2 dir. Cismin radyal ivmesini, hızını ve teğetsel ivmesini bulunuz.



$$|\vec{a}_t| = |\vec{a}|\cos 30^\circ = (15\ m/s^2)\cos 30^\circ = 13\ m/s^2$$

$$|\vec{a}_r| = |\vec{a}|\sin 30^\circ = 7,5\ m/s^2$$

$$|\vec{a}_r| = \frac{v^2}{r} \qquad v = \sqrt{r\, a_r}$$

$$= \sqrt{(2,5)(7,5)} = 4,33\ m/s$$

53

Örnek 6.2: Bir tren virajı dönerken hızını 15 s içinde 90 km/h den 50 km/h ye düşürmektedir. Virajın yarıçapı 150 m'dir. Trenin hızı 50 m/s ulaştığı anda ivmesini bulunuz.

$$|a_t| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50-90}{15\,s} = \frac{-40\,km/h}{15\,s} = \frac{-40\left(\frac{km}{h}\right)\left(\frac{10^3\,m}{1\,km}\right)\left(\frac{1h}{3600}\right)}{15\,s}$$

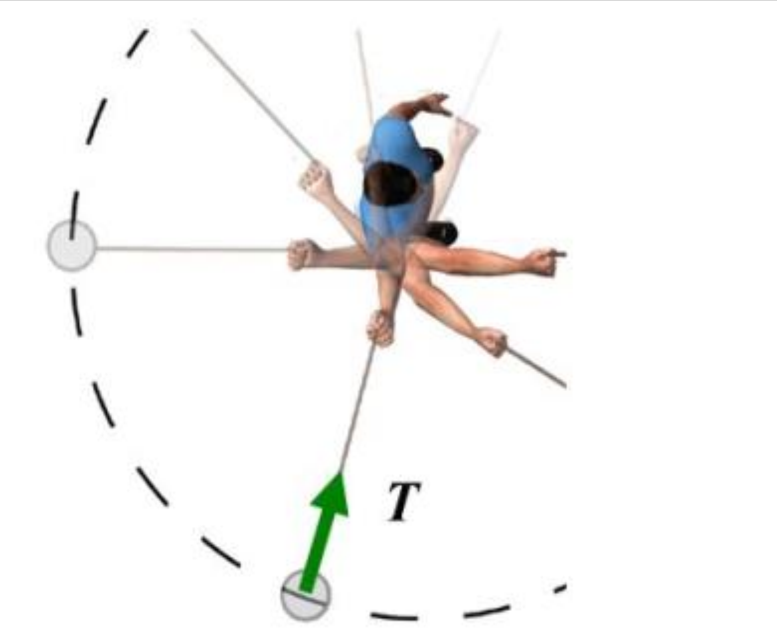
$$a_t = -0,741\ m/s^2$$

$$|\vec{a}_r| = \frac{V^2}{r} = \frac{\left[50\left(\frac{km}{h}\right)\left(\frac{10^3\,m}{1\,km}\right)\left(\frac{1h}{3600\,s}\right)\right]^2}{150\,m} = \frac{(13,9)^2}{150} = 1,29\ m/s^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{(1,29)^2 + (-0,741)^2} = 1,48\ m/s^2$$

6.3 Newton Yasalarının Düzgün Dairesel Harekete Uygulanması:

Bu kısımda dairesel yörüngede hareket eden cisimlere Newton mekaniğinin nasıl uygulanacağını öğreneceğiz. Örneğin, m kütleli bir topun r uzunluğunda bir ipin ucuna bağlandığını ve yatay düzlemde dairesel bir yörüngede sabit hızla döndüğünü varsayalım. Top eylemsizliğinden dolayı doğrusal bir yol boyunca ilerlemek ister, ancak ipin topa uyguladığı kuvvet nedeniyle dairesel bir yörüngede hareket eder. Bu gerilme kuvveti ip boyunca ve merkeze doğru yönelmiştir. Biliyoruz ki dairesel yörüngede hareket eden cisim hız vektörünün yönündeki değişiklik nedeniyle radyal (merkezcil) bir ivmeye sahiptir.

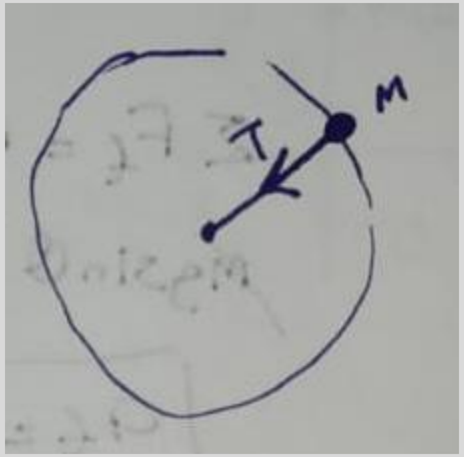


Newton ikinci yasasını uygularsak, bu merkezcil ivmeye neden olan net kuvvet değeri için

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_r = m\frac{v^2}{r}$$

buluruz. Cisme etki eden merkezcil kuvvet ortadan kalkarsa (ip koparsa), cisim dairesel hareketini sürdüremez ve dairesel yörüngeye teğet olan doğrultuda savrularak doğrusal bir yörüngede hareket etmeye başlar. İpteki gerilme kuvveti gibi cisimlerin dairesel yörüngede kalmasını sağlayan bu tür kuvvetlere ***merkezcil kuvvet*** adı verilir. Merkezcil kuvvet hayali bir kuvvet olup, gerçekte cisim üzerine etki eden bir dış kuvvet değildir. Sadece cisim üzerine etki eden diğer dış kuvvetlerin radyal bileşenleri toplamı merkezcil kuvveti oluşturur.

Örnek 6.3: 0.5 kg kütleli bir top 1.5 m uzunluğundaki kablonun ucuna bağlanmıştır. Top yatay düzlemde, dairesel yörünge de hızla dönüyor. Kablo 50 N luk maksimum gerilmeye dayanabiliyorsa, kopmadan hemen önce topun sahip olabileceği maksimum sürati nedir?



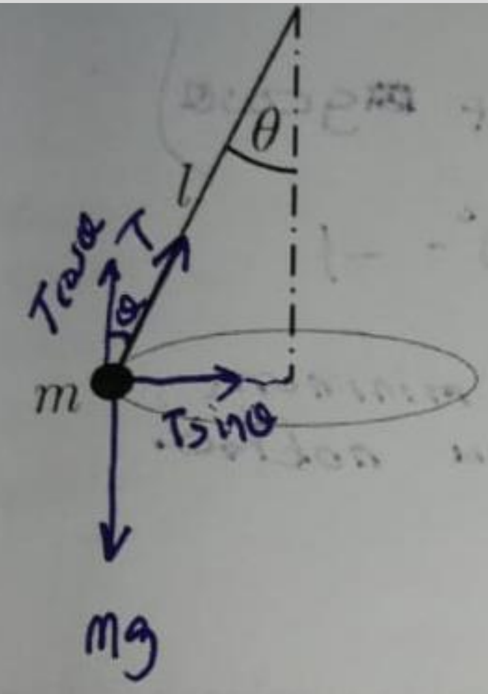
$$\Sigma F_r = m a_r = \frac{m v^2}{r}$$

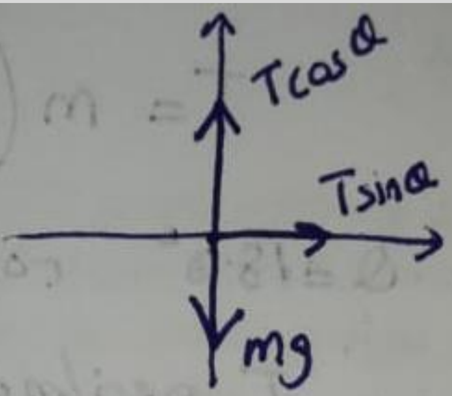
$$T_{max} = \frac{m v^2}{r}$$

$$V = \sqrt{\frac{r \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{(1{,}5\,m)(50\,N)}{0{,}5\,kg}}$$

$$V = 12{,}2\ m/s$$

Örnek 6.4: Kütlesi m olan bir cisim *l* uzunluklu bir iple tavana asılmıştır. Bu cisim r yarıçaplı yatay dairesel bir yörünge üzerinde v hızıyla dönmektedir. Cismin hızını bulunuz.





Düşey doğrultuda hareket olmadığı için

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T\cos\theta - mg = 0$$

$$T\cos\theta = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\Sigma F_r = m a_r = \frac{mv^2}{r}$$

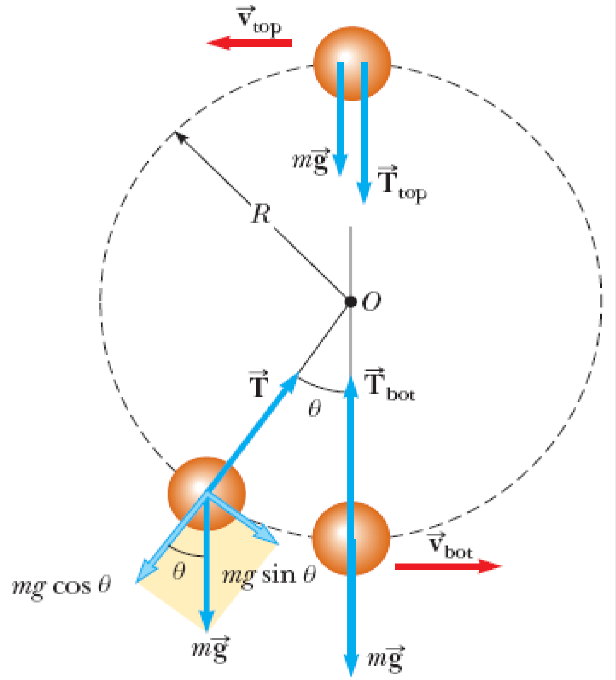
$$T\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\sin\theta = \frac{\cancel{m}v^2}{r}$$

$$g\tan\theta = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Örnek 6.6: Kütlesi m olan küçük bir küre, R uzunluğunda bir ipin ucuna bağlanarak düşey düzlemde O noktası etrafında dairesel yörüngede döndürülüyor. Cismin hızının büyüklüğü v olduğu ve ipin düşeyle θ açısı yaptığı bir anda ipteki gerilme kuvvetini bulunuz.



$$\Sigma F_t = m a_t$$

$$\cancel{m} g\sin\theta = \cancel{m} a_t$$

$$\boxed{a_t = g\sin\theta}$$

$$\Sigma F_r = \frac{mv^2}{R}$$

$$T - mg\cos\theta = \frac{mV^2}{R}$$

$$T = m\left(\frac{V^2}{R} + g\cos\theta\right)$$

Özel Durumlar:

$\theta = 180°$ $\cos 180° = -1$

Yörüngenin en üst noktasında:

$$T_{üst} = m\left(\frac{V_{üst}^2}{R} - g\right)$$

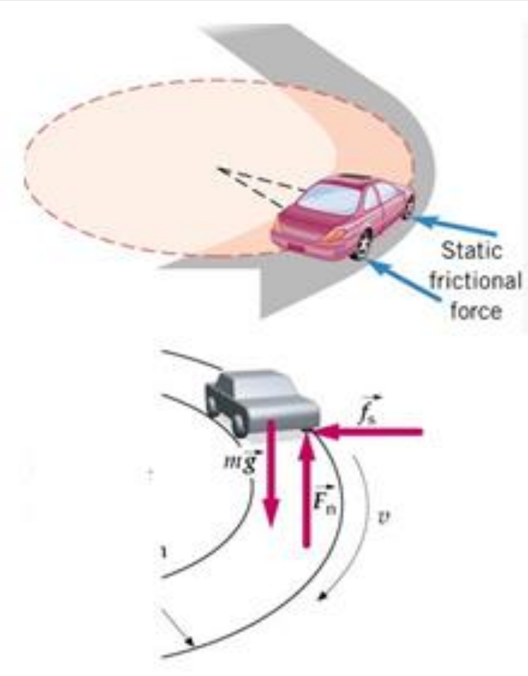
T gerilmenin minimum değeridir. Tam bu noktada $a_t = 0$ olur.

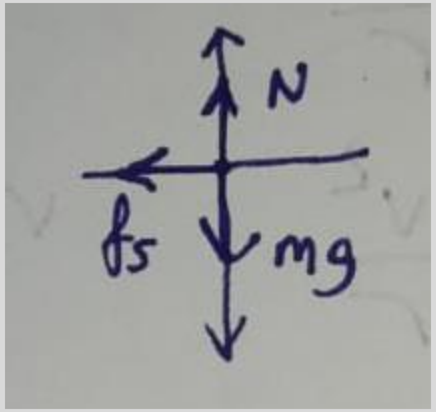
Yörüngenin en alt noktasında

$$T_{alt} = m\left(\frac{V_{alt}^2}{R} + g\right)$$

Maksimum gerilme kuvveti

Örnek 6.7: 1500 kg kütleli bir araba 35 m yarıçaplı bir virajda hareket etmektedir. Yol ve tekerlekler arasındaki statik sürtünme katsayısı kuru zemin için 0.5 ise, arabanın emniyetli olarak dönebileceği maksimum hızı bulunuz.





$$N = mg$$

$$f_s = \frac{mv^2}{r}$$

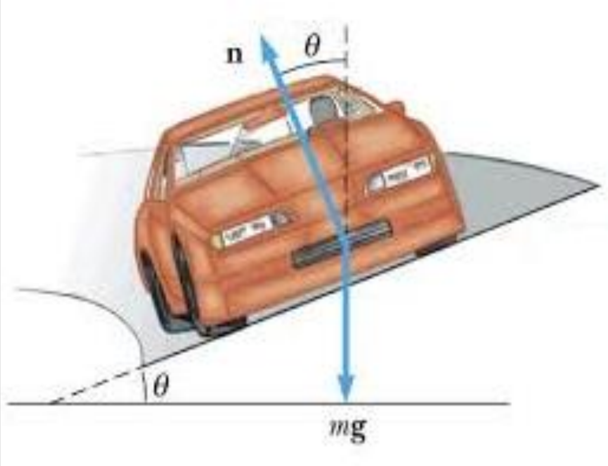
$$\mu_s N = \frac{mv^2}{r}$$

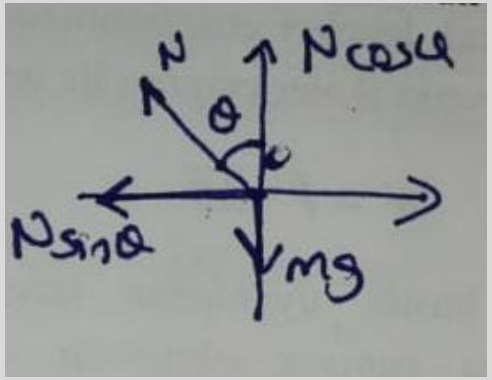
$$\mu_s \cancel{m} g = \frac{\cancel{m} v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\mu_s r g}$$

$$= 13,1 \ m/s$$

Örnek 6.8: Bir mühendis arabaların sürtünmeye güvenmeksizin savrulmadan dönebilecekleri eğimli bir otoyol virajı yapmak istiyor. Bir arabanın böyle bir virajı 13.4 m/s lik bir hızla güvenli dönebilmesi için yolun eğimi kaç derece olmalıdır. Virajın yarıçapı 50 m'dir.





$$N\cos\theta = mg$$

$$\boxed{N = \frac{mg}{\cos\theta}}$$

$$\Sigma F_r = \frac{mv^2}{r}$$

$$N\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

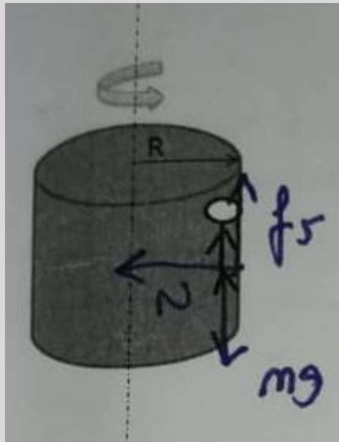
$$\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\sin\theta = \frac{\cancel{m}v^2}{r}$$

$$g\tan\theta = \frac{v^2}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{(13,4)^2}{(50\,m)(9,8\,m/s^2)}$$

$$\tan\theta = 0,366 \qquad \theta = 20,1^\circ$$

Örnek 6.9: Bir eğlence parkında ekseni etrafında dönen düşey geniş bir silindir vardır. Silindir, içindeki bir kişinin duvarından düşmeden durabilmesi için yetecek hızda dönüyor. Silindir ile kişi arasındaki statik sürtünme katsayısı μ_s ve silindir yarıçapı R'dir. Kişinin düşmeden dönebilmesi için maksimum dönme periyodunu $T = \sqrt{4\pi^2 R\mu_S/g}$ olduğunu gösteriniz. (*Not: Periyot ile lineer hız arasındaki ilişki* $v = 2\pi r/T$ *şeklindedir.*)



$$f_s = mg$$

$$\mu_s N = mg$$

$$\boxed{N = \frac{mg}{\mu_s}}$$

$$\Sigma F_r = \frac{mv^2}{R}$$

$$N = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{\cancel{m}g}{\mu_s} = \frac{\cancel{m}v^2}{R}$$

$$v^2 = \sqrt{\frac{Rg}{\mu_s}}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{v}{R}} = \frac{2\pi R}{v}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{\mu_s}{Rg}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 R^{\cancel{2}}\mu_s}{\cancel{R}g}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R\mu_s}{g}}$$