FİZİK

10.HAFTA

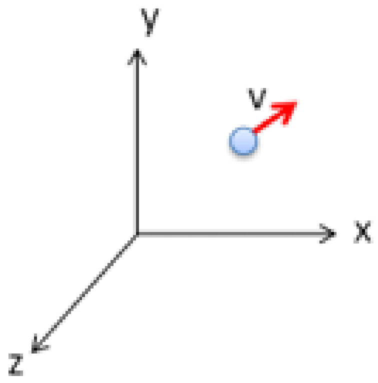
9. DOĞRUSAL MOMENTUM VE ÇARPIŞMALAR

9.1 Doğrusal Momentum ve Korunumu:

v çizgisel hızı ile hareket eden m kütleli bir cismin doğrusal momentumu kütle ve hızın çarpımı olarak tanımlanır.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

Momentum vektörel bir büyüklük olup yönü hız vektörü ile aynı yöndedir. Birimi kgm/s dir. Cisim üç boyutlu uzayda rastgele bir yönde hareket ediyorsa, cismin momentumu üç bileşene sahip olacaktır.



$$\overrightarrow{P_x} = m\overrightarrow{v_x}$$

$$\overrightarrow{P_y} = m\overrightarrow{v_y}$$

$$\overrightarrow{P_z} = m\overrightarrow{v_z}$$

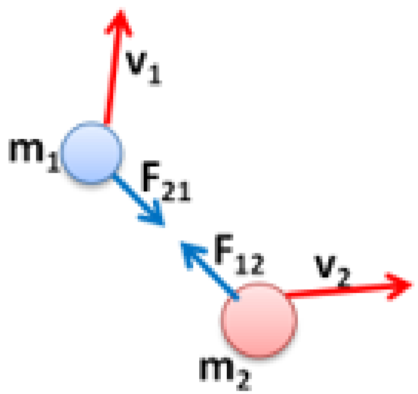
Newton'un ikinci hareket yasasnı kullanarak, bir cismin doğrusal momentumunu ona etki eden kuvvete bağlayabiliriz.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Bir cisim üzerine etki eden net kuvvet sıfır ise momentumun zamana göre türevi sıfır olur. Yani cismin çizgisel momentumu zaman içinde sabit kalır. Bu durumda, $\sum F = 0$ koşulu altında bulunan bir ***cismin momentumun korunduğu*** söylenebilir. Karışık hareket problemlerinin çözülmesinde enerji korunumu kadar momentum korunumu yasası da faydalı olur.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad ise \quad \vec{P}\, sabittir.$$

Birbiri ile etkileşen ve çevrelerinden yalıtılmış iki cisim ele alalım. Yani iki parçacık birbirlerine kuvvet uygulasın fakat hiçbir dış kuvvet bulunmasın. Bu durumun analizinde Newton un 3. Yasası önemlidir. Birinci parçacık ikinci parçacığa bir kuvvet uygularsa, ikinci parçacıkta birinci parçacığa eşit fakat zıt yönde bir kuvvet uygular.



Birinci parçacığın momentumu P_1 ve ikinci parçacığın momentumu P_2 olsun. Her iki parçacığa Newton 2. Yasasını uygularsak,

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\overrightarrow{P_1}}{dt} \qquad \vec{F}_{12} = \frac{d\overrightarrow{P_2}}{dt}$$

Burada $\vec{F}_{21}$ ikinci parçacık tarafından birinciye ve $\vec{F}_{12}$ birinci parçacık tarafından ikinciye uygulanan kuvvettir. Newton 3. Yasasına göre bu kuvvetler büyüklükçe birbirine eşit fakat zıt yöndedirler. O halde,

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$\frac{d\overrightarrow{P_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{P_2}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}\right)}{dt} = 0$$

olarak yazılabilir. Buradan $P = P_1 + P_2$ toplam momentumun sabit kaldığı sonucuna varırız.

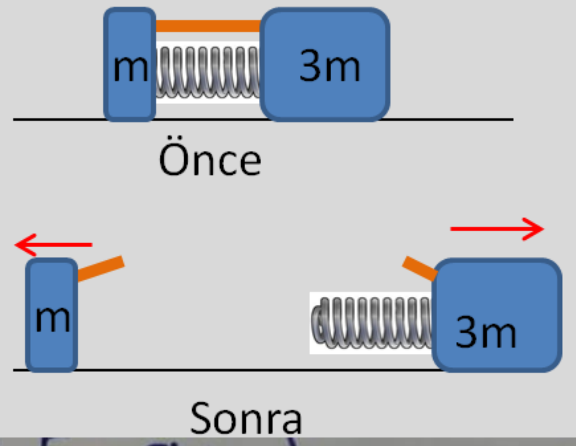
$$P_T = \sum P = P_1 + P_2 = sabit$$

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1s} + \vec{P}_{2s}$$

En son elde edilen eşitlik önemli mekanik yasalarından biri olan ***momentumun korunumu yasası***dır ve şu şekilde ifade edilir.

"Yalıtılmış bir sistemde iki veya daha çok parçacık etkileşiyorsa sistemin toplam momentumu sabit kalır."

Örnek 9.1: Kütleleri m ve 3m olan iki blok yatay sürtünmesiz bir zemin üzerinde bulunmaktadır. Aralarına bir yay yerleştirilen iki blok şekildeki gibi birbirine yaklaştırılmış ve yayın sıkışması sağlanmıştır. Ayrıca blokları sabit tutmak için bloklar birbirine bir halat ile bağlanmıştır. Halat kesildikten sonra 3m kütleli blok sağa doğru 2 m/s hızla hareket ettiğine göre a) m kütleli bloğun hızını b) Yayda depolanan esneklik potansiyel enerjisini m=0.35 kg için hesaplayınız.



a) Momentum korunumuna göre:

$$P_{ilk} = P_{son}$$

$$m\cancel{V_{1i}}^{\,0} + 3m\cancel{V_{2i}}^{\,0} = mV_{1s} + 3mV_{2s}$$

$$0 + 0 = mV_{1s} + 3m\,(2\,m/s)$$

$$\cancel{m}V_{1s} = -6\cancel{m}$$

$$V_{1s} = -6\,m/s$$

b) Enerjinin korunumu ilkesine göre:

$$U_{yay} = \frac{1}{2}mV_{1s}^2 + \frac{1}{2}(3m)V_{2s}^2$$

$$U_{yay} = \cancel{\frac{1}{2}}kx^2 = \cancel{\frac{1}{2}}m(-6)^2 + \cancel{\frac{1}{2}}3m\,(2)^2$$

$$U_{yay} = \frac{1}{\cancel{2}}m\overset{18}{\cancel{36}} + \frac{1}{\cancel{2}}\overset{2}{3}m\overset{2}{\cancel{4}} = 24m = 24.(0,35\,kg)$$

$$U_{yay} = 8,4\ \text{Joule}$$

9.2 İmpuls ve Momentum

Herhangi bir cisim üzerine zamanla değişen bir dış kuvvet uygulandığı zaman, cismin çizgisel momentumu değişecektir. Newton un 2. yasasına göre,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad veya \quad d\vec{P} = \vec{F}\,dt$$

olur. Kuvvet belli bir zaman aralığında uygulanmış ise, momentum değişimi için yukarıdaki eşitliğin integralini alırız. Parçacığın momentumu t_i anında P_i değerinden t_s anında P_s değerine değişirse,

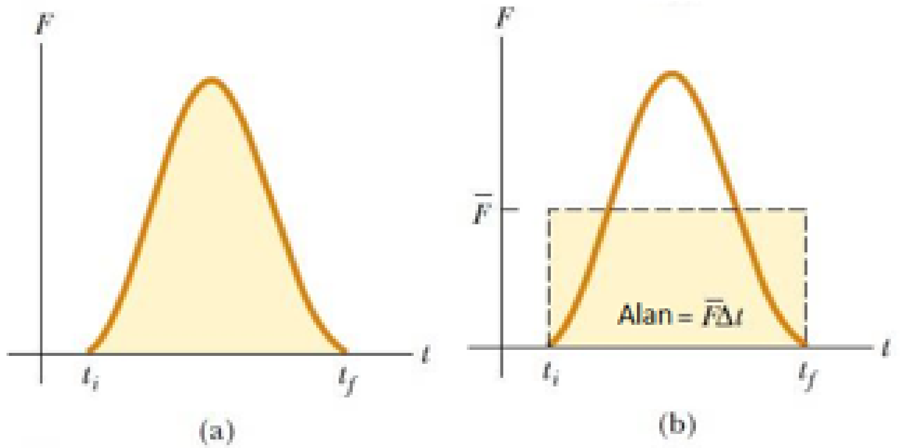
$$\Delta P = P_s - P_i = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}\,dt = I(\text{İmpuls})$$

Bir parçacık üzerine etki eden F kuvvetinin impulsu, bu kuvvetin sebep olduğu parçacığın momentumundaki değişime eşittir. İmpuls parçacığın kendi başına bir özelliği olmayıp, uygulanan dış kuvvetin parçacığın momentumunu değiştirmesi ile ilgilidir. Ayrıca, impuls herhangi bir kuvvet uygulayan kaynaktan parçacığa momentum aktarılması olarak da tanımlanabilir.

Genel olarak kuvvet zamanla değişeceğinden, ortalama bir F kuvveti tanımlamak uygun olur.

$$\bar{F} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_s} \vec{F}\, dt$$

Bu durumda impuls $I = \bar{F}\Delta t$ olur.



Örnek 9.2: Özel bir çarpışma deneyinde 1500 kg kütleli bir otomobil bir duvara çarpar. Otomobilin ilk ve son hızları $V_i = -15\,\hat{\imath}\ m/s$ ve $V_s = 3\,\hat{\imath}\ m/s$ dir. Çarpışma 0.15 s sürdüğüne göre çarpışma ile ilgili impulsu ve otomobile uygulanan ortalama kuvveti bulunuz.

$$P_i = mV_i = (1500\,kg)(-15\,m/s) = -22,5\times10^3\ kgm/s$$

$$P_s = mV_s = (1500\,kg)(3\,m/s) = 4,5\times10^3\ kgm/s$$

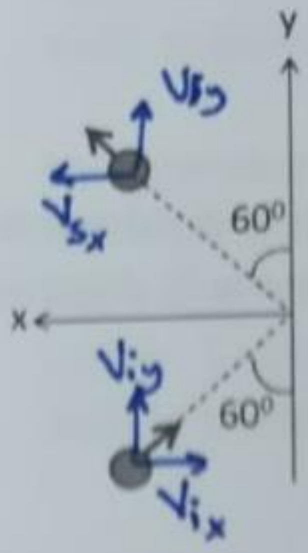
$$I = \Delta P = P_s - P_i = (4,5\times10^3) - (-22,5\times10^3)$$

$$= 27\times10^3\ kgm/s$$

Ortalama Kuvvet:

$$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{27\times10^3}{0,15} = 18\times10^4\ N$$

Örnek 9.3: Kütlesi 3 kg olan bir top 10 m/s lik bir hızla şekildeki gibi düşey eksenle 60^0 açı yaparak bir duvara çarpar. Çarpışma sonrasında top aynı hız ve açı ile geri teper. Bu çarpışma 0.2 s sürdüğüne göre duvarın topa uyguladığı ortalama kuvveti bulunuz.



$V_i = 10 \, m/s$

$\vec{V}_{iy} = \vec{V}_{sy} = V_i \cos 60 \hat{j} = 10 \cos 60° = 5\hat{j} \, m/s$

$\vec{V}_{ix} = -V_i \sin 60 \hat{i} = -8,66 \hat{i} \, m/s$

$\vec{V}_{sx} = V_i \sin 60° \hat{i} = 8,66 \hat{i} \, m/s$

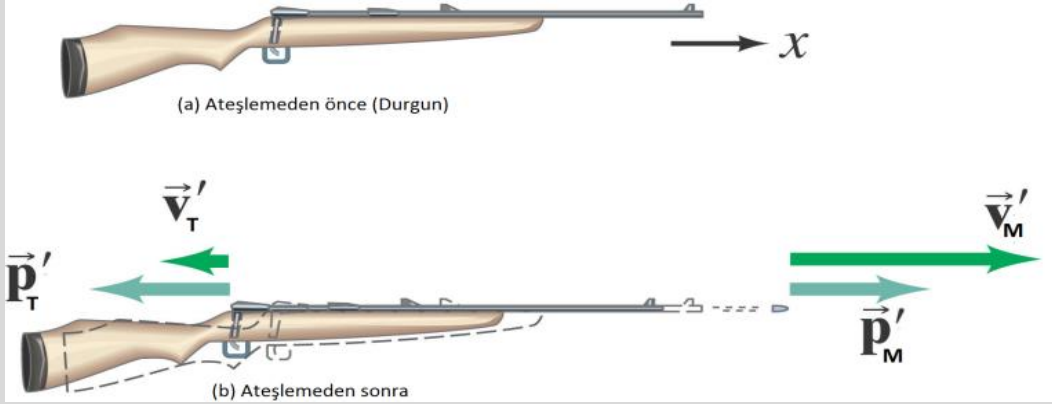
$\Delta P = mV_{sx} - mV_{ix} = P_s - P_i = 26 - (-26) = 52$

$P_i = m V_{ix} = (3kg)(-8,66 \, m/s) = -26 \, N$

$P_s = m V_{sx} = (3kg)(8,66 \, m/s) = 26 \, N$

$\bar{F} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{52}{0,2} = 260 \, N$

Örnek 8.4: 620 m/s hızla 0,020 kg kütleli mermileri atan 5,0 kg kütleli bir tüfeğin geri tepme hızını hesaplayın.



$$P_{ilk} = P_{son}$$

$$m_{mermi} V_{m_i} + m_T V_{T_i} = m_m V_{m_s} + m_T V_{T_s}$$

$$0 + 0 = m_m V_{m_s} + m_T V_{T_s}$$

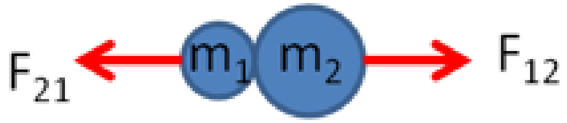
$$V_{T_s} = -\frac{m_m}{m_T} V_{m_s}$$

$$= -\frac{0{,}020}{5}\, 620\ m/s$$

$$= -2{,}5\ m/s$$

9.3 Tek Boyutta Çarpışmalar

Çarpışma iki parçacığın birbirleri üzerinde impulsif kuvvetler oluşturarak kısa bir süre için birlikte olmaları şeklinde tanımlanır. Enerjinin ve momentumun korunumu yasalarını kullanarak çarpışan cisimlerin, çarpışmadan önce ve sonraki hareketleri hakkında bilgi sahibi olunabilir. Aşağıdaki şekilde verilen m_1 ve m_2 kütlelerinin birbiri ile çarpıştığı durumu ele alalım.



Burada F_{21} kuvveti, m_2 kütlesinin çarpışma sırasında m_1 üzerine uyguladığı kuvvettir ve çarpışmadan dolayı m_1 kütlesinin momentumundaki değişim

$$\Delta P_1 = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}_{21}\, dt$$

olur. Benzer şekilde m_2 kütlesinin momentum değişimi ise

$$\Delta P_2 = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}_{12}\, dt$$

Newton'un 3. yasasına göre şu sonucu yazabiliriz.

$$\Delta P_1 = -\Delta P_2 \quad veya \ \Delta P_1 + \Delta P_2 = 0$$

Sistemin toplam momentumu $P_T = P_1 + P_2$ olduğundan, çarpışmadan dolayı sistemin momentumunda ki değişimin sıfır olduğu yani sistemin momentumunun korunduğu sonucuna varırız. Çarpışma sırasında ortaya çıkan itme kuvvetleri iç kuvvetler olduğundan sistemin momentumunda herhangi bir değişiklik meydana getirmezler. O halde bütün çarpışma süreçleri için, **"Yalıtılmış bir sistemin çarpışmadan hemen önceki toplam momentumu çarpışmadan hemen sonraki toplam momentumuna eşittir"** diyebiliriz.

Örnek 9.5: Trafik ışığında durmakta olan 1800 kg kütleli bir arabaya, 900 kg kütleli bir araba arkadan çarpar ve iki araba birlikte sürüklenirler. Çarpışmadan önce küçük arabanın hızı 20 m/s ise çarpışmadan sonra birleşik kütlenin sürüklenme hızı nedir?

$$m_1 V_{1i} + m_2 \cancel{V_{2i}}^{\,0} = m_1 V_{1s} + m_2 V_{2s}$$

$$m_1 V_{1i} = (m_1 + m_2) V_{2s}$$

$$V_{2s} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} V_{1i} = \frac{900}{(900+1800)} (20\,m/s)$$

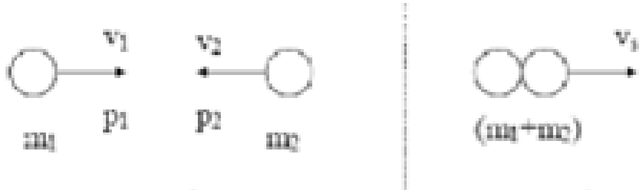
$$= \frac{20}{3} = 6{,}67\ m/s$$

a) Esnek Olmayan Çarpışmalar:

Çarpışma sırasında momentum korunduğu halde kinetik enerjinin çarpışmadan önce ve sonra aynı olmadığı çarpışma çeşididir. Yani çarpışma sırasında sistemin kinetik enerjisi korunmaz. Makroskopik çarpışmaların çoğu elastik olmayan çarpışmadır. Bu tip çarpışmalarda kinetik enerji değişik formlardaki enerjilere (termal enerji gibi) dönüşür.

b) Tamamen Esnek Olmayan Çarpışmalar:

Birbiri ile çarpışan iki cismin çarpışma sonrasında birlikte hareket ettiği çarpışma şeklidir. İki cisim aynı hız ve doğrultuda birlikte hareket eder. Birbiri ile çarpışan m_1 ve m_2 kütlelerini ele alalım. Çarpışmadan önceki hızları V_1 ve V_2 olan cisimler çarpışmadan sonra V_s hızı ile birlikte hareket ediyorsa, bu süreçte momentum korunumu yasası uygulanırsa,



Çarpışmadan önce *Çarpışmadan sonra*

$$m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)V_s$$
$$V_s = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{(m_1 + m_2)}$$

c) Esnek Çarpışmalar:

Toplam momentum ve toplam kinetik enerjinin çarpışmadan önce ve sonra sabit kaldığı çarpışma şeklidir. Gerçek esnek çarpışmalar atom ve atomaltı parçacıklar arasında gerçekleşir. Makroskobik cisimler arasında esnek çarpışmaya en yakın örnek bilardo toplarının çarpışma olabilir. Kafa kafaya esnek çarpışmaya uğrayan iki parçacık ele alalım.

Momentum ve kinetik enerji korunumu için aşağıdaki iki denklem yazılabilir.

$$m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 V_{1s} + m_2 V_{2s} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 {V_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {V_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {V_{1s}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {V_{2s}}^2 \qquad (2)$$

Kinetik enerji denkleminde ½ sadeleştirelim ve denklemi yeniden yazalım:

$$m_1 {V_{1i}}^2 + m_2 {V_{2i}}^2 = m_1 {V_{1s}}^2 + m_2 {V_{2s}}^2 \qquad (3)$$

Aynı kütleye sahip terimleri bir araya toplayalım:

$$m_1({V_{1i}}^2 - {V_{1s}}^2) = m_2({V_{2s}}^2 - {V_{2i}}^2) \qquad (4)$$

Eşitliğin her iki tarafını çarpanlarına ayıralım:

$$m_1(V_{1i} - V_{1s})(V_{1i} + V_{1s}) = m_2(V_{2s} - V_{2i})(V_{2s} + V_{2i}) \qquad (5)$$

Momentum korunumu denklemine göre ise $m_1(V_{1i} - V_{1s}) = m_2(V_{2s} - V_{2i})$ olur. Bu eşitliği yukarıdaki (5) nolu denklemde kullanırsak.

$$m_2(V_{2s} - V_{2i})(V_{1i} + V_{1s}) = m_2(V_{2s} - V_{2i})(V_{2s} + V_{2i}) \qquad (6)$$

(6) nolu denklemin her iki tarafındaki bulunan benzer terimleri sadeleştirirsek,

$$(V_{1i} + V_{1s}) = (V_{2s} + V_{2i}) \qquad (7)$$

yada

$$V_{1i} - V_{2i} = - V_{1s} + V_{2s} \qquad (8)$$

(1) ve (8) nolu denklemler kullanılarak parçacıkların son hızları ilk hızlara ve kütlelere bağlı olarak bulunabilir.

$$V_{2s} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) V_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) V_{2i}$$

$$V_{1s} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) V_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) V_{2i}$$

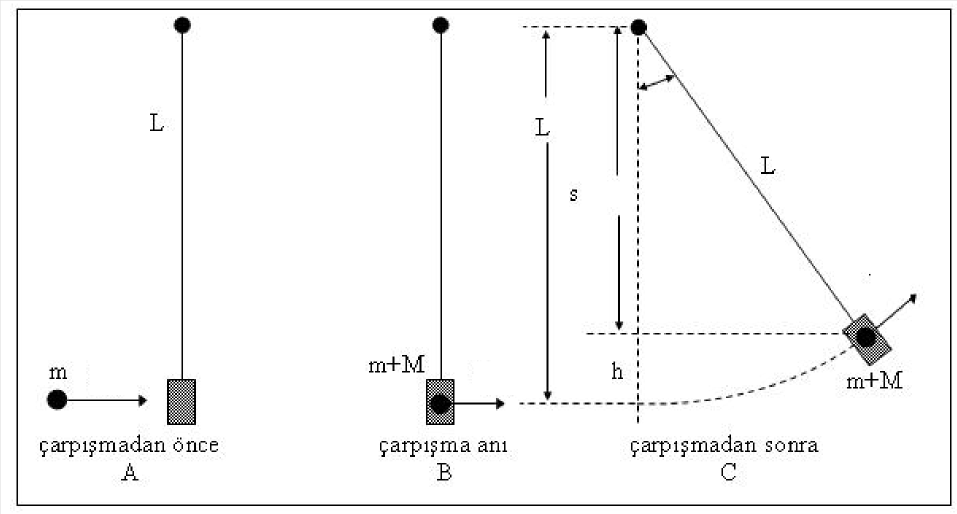
Özel Durumlar:

1) $m_1 = m_2$ olması durumunda $V_{1s} = V_{2i}$ *ve* $V_{2s} = V_{1i}$ olur. Yani parçacıklar hızlarını değiş-tokuş yapmıştır. Bilardo toplarında gözlenen bir durumdur. Çarpılan top, çarpan topun hızı ile harekete başlar.
2) m_2 kütlesi başlangıçta durgun ise ($V_{2i} = 0$)

$$V_{2s} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) V_{1i}$$

$$V_{1s} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) V_{1i}$$

Örnek 9.6: Balistik sarkaç mermi gibi hızlı hareket eden cisimlerin hızını ölçmek için kullanılan bir sistemdir. Mermi hafif teller ile asılı büyük bir ağaç blok üzerine doğru ateşlenir. Mermi ağaç bloğa çarpar ve birlikte h kadar yükseğe çıkarlar. Merminin ilk hızını kütlelere ve bloğun yükselme mesafesi (h) bağlı olarak bulunuz.



Momentum korunumuna göre

$$m_1 V_{1i} + m_2 \cancelto{0}{V_{2i}} = (m_1+m_2) V_s$$

$$V_s = \frac{m_1 V_{1i}}{(m_1+m_2)}$$

Enerjinin korunumuna göre:

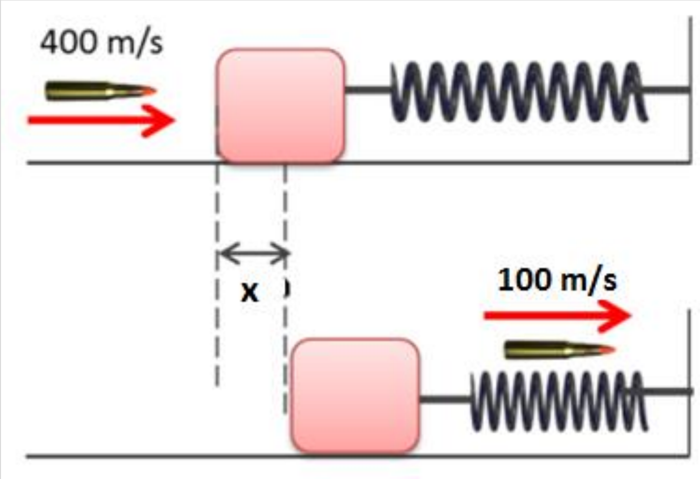
Çarpışmadan hemen sonra (blok+mermi) Vs hızıyla bir kinetik enerjiye sahiptir. Bu kinetik enerjiyi kullanarak (blok+mermi) yukarı doğru h kadar yükselir. Bütün kinetik enerji potansiyel enerjiye dönüşür.

$$\frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)} V_s^2 = \cancel{(m_1+m_2)} g h$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_1^2 V_{1i}^2}{(m_1+m_2)^2} = g h$$

$$V_{1i}^2 = \frac{2gh(m_1+m_2)^2}{m_1^2} \Rightarrow V_{1i} = \frac{(m_1+m_2)}{m_1}\sqrt{2gh}$$

Örnek 9.7: Başlangıçta 400 m/s hızla ilerleyen 5 gr' lık bir mermi, şekildeki gibi 1 kg'lık bir bloğu deler geçer. Blok ilk önce yatay, sürtünmesiz yüzey üzerinde durgun ve yay sabiti 900 N/m olan bir yaya tutturulmuştur. Merminin bloğu terk etme hızı 100 m/s olduğuna göre çarpışmadan sonra blok sağa doğru ne kadar kayar?



Momentum korunumuna göre

$$m_1 V_{1i} + m_2 \underbrace{\cancel{V_{2i}}}_{0} = m_1 V_{1s} + m_2 V_{2s}$$

$$m_1 (400 m/s) = m_1 (100) + m_2 V_{2s}$$

$$V_{2s} = \frac{300 m_1}{m_2} = \frac{300 (0,005)}{1} = 1,5 \ m/s$$

Blok 1,5 m/s hızı ile sağa doğru hareket edip yayı sıkıştırır.
Kinetik enerjisi yayın potansiyel enerjisine dönüşür.

$$\cancel{\frac{1}{2}} m_2 V_{2s}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k x^2$$

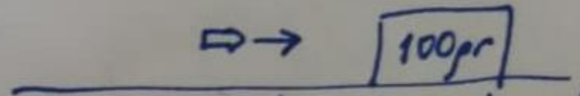
$$(1kg)(1,5)^2 = 900 x^2$$

$$\cancel{x^2 = \frac{900}{2,25} = 400}$$

$$x^2 = \frac{2,25}{900} \Rightarrow x = 0,05 \ m$$

Örnek 9.10: 12 gr lık bir mermi yatay zeminde durgun olan 100 gr lık bir ağaç bloğa atılıyor. Ağaç blok duruncaya kadar 7.5 m kayıyor. Blok ve yüzey arasındaki sürtünme katsayısı 0.65 ise, çarpışmadan hemen önce ki merminin hızını bulunuz.

Çarpışmada momentum korunur.



Çarpışmadan sonra blok kazandığı hız ile 7,5 m kayıyor. Sürtünmeli ortamda enerji korunumunu uygularsak

$$\Delta E = -f_k d$$

$$\frac{1}{2}(m_m+m_b)V_s^2 - \frac{1}{2}(m_m+m_b)V_i^2 = -\mu_k N d$$

$$\frac{1}{2}\cancel{(m_m+m_b)}\left(\cancel{V_s^2} - V_i^2\right) = -\mu_k \cancel{(m_m+m_b)} g d$$

$$V_i^2 = 2\mu_k g d = 2 \cdot 0{,}65 \cdot 9{,}8 \cdot 7{,}5\,m \Rightarrow$$

Cevap: 91.2 m/s

$$V_i = 9{,}77\ m/s$$

Momentum korunumuna göre

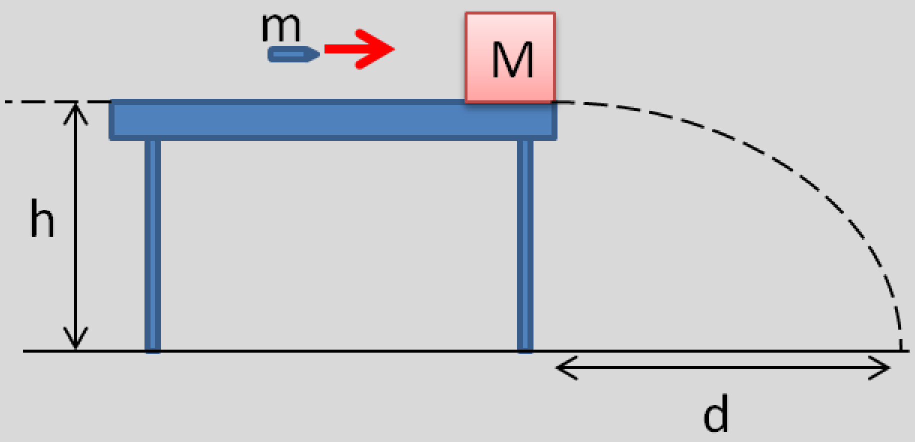
$$m_m V_m + \cancel{m_b V_b} = (m_m+m_b)V_s$$

$$V_m = \frac{(m_m+m_b)}{m_m} V_s$$

$$V_m = \frac{0{,}112}{0{,}012}\, 9{,}77$$

$$= 91{,}2\ m/s$$

Örnek 9.11: Kütlesi m olan bir mermi yerden yüksekliği h kadar olan sütünmesiz bir masanın ucunda bulunan bir ağaç bloğa doğru ateşleniyor. Blok mermi içinde kalıyor ve birlikte masanın kenarından d kadar uzağa düşüyorlar. Buna göre merminin ilk hızını bulunuz.



Momentumun korunumuna göre

$$m_m V_m + m_b \cancel{V_b}^{\,0} = (m_m + m_b) V_s$$

$$V_m = \frac{(m_m + m_b)}{m_m} V_s$$

V_s hızı ile mermi + blok kütlesi eğik atış hareketine maruz kalıyor.

$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad d = V_s t$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_s^2}$$

$$V_s^2 = \frac{g d^2}{2h} \qquad V_s = d\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$V_m = \frac{(m_m + m_b)}{m_m} d\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

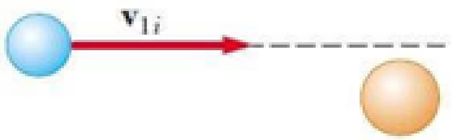
9.4 İki Boyutta Çarpışmalar:

İki parçacığın düzlemde yani iki boyutta çarpışması söz konusu olduğunda, cisimlerin momentumlarının her iki bileşeni de *ayrı ayrı* momentum korunumu yasasını sağlar. x ve y doğrultusunda çarpışmadan önce ve sonraki momentum eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

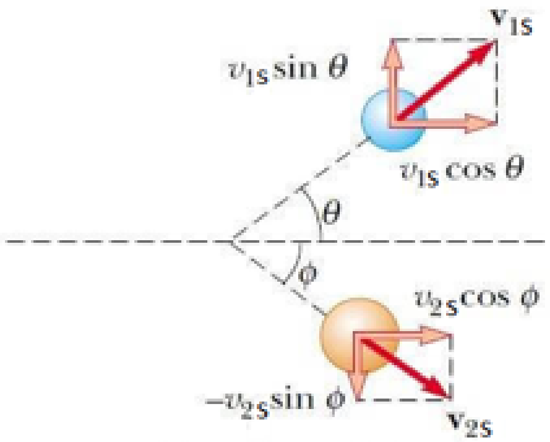
$$m_1 V_{1i_x} + m_2 V_{2i_x} = m_1 V_{1s_x} + m_2 V_{2s_x}$$

$$m_1 V_{1i_y} + m_2 V_{2i_y} = m_1 V_{1s_y} + m_2 V_{2s_y}$$

Örneğin, başlangıçta durgun olan m_2 kütleli parçacık ile m_1 kütleli parçacığın çarpışmasını ele alalım. Şekildeki gibi çarpışma tam burun buruna olmadığından, çarpışmadan sonra m_1 kütlesi yatay eksenle θ ve m_2 kütleli parçacık ise φ açısı yaparak hareket eder.



(a) Çarpışmadan önce



(b) Çarpışmadan sonra

Momentumun x bileşeni $$m_1 V_{1i} = m_1 V_{1s} \cos\theta + m_2 V_{2s} \cos\varphi$$

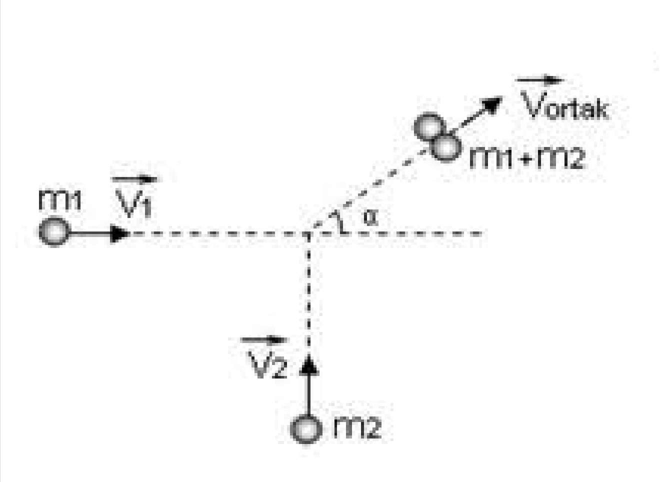
Momentumun y bileşeni $$0 = m_1 V_{1s} \sin\theta - m_2 V_{2s} \sin\varphi$$

Çarpışmanın esnek olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda çarpışma sürecinde parçacıkların kinetik enerjisi de korunacaktır. Enerji korunum denklemi ise

$$\frac{1}{2} m_1 {V_{1i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {V_{1s}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {V_{2s}}^2$$

olacaktır.

Örnek 9.13: 25 m/s hızla doğuya doğru giden 1500 kg lık bir araba, şekildeki gibi 20 m/s hızla kuzeye giden 2500 kg lık büyük bir yük arabası ile kavşakta çarpışıyor. Araçların tamamen esnek olmayan çarpışma yaptıklarını göz önüne alarak, çarpışmadan sonra enkazın hızının büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.



$$m_1 V_{1ix} + m_2 \cancel{V_{2ix}}^{0} = m_1 V_{1sx} + m_2 V_{2sx}$$

$$(1500)(25) = (m_1 + m_2) V_{sx}$$

$$(1500)(25) = 4000$$

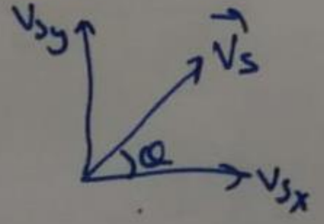
$$V_{sx} = \frac{37500}{4000} = 9,4 \text{ m/s}$$

$$\cancel{m_1 V_{1iy}}^{0} + m_2 V_{2iy} = m_1 V_{1sy} + m_2 V_{2sy}$$

$$(2500)(20) = 4000 V_{sy}$$

$$V_{sy} = 12,5 \text{ m/s}$$

$$V_s = \sqrt{V_{sx}^2 + V_{sy}^2} = 15,6 \text{ m/s}$$



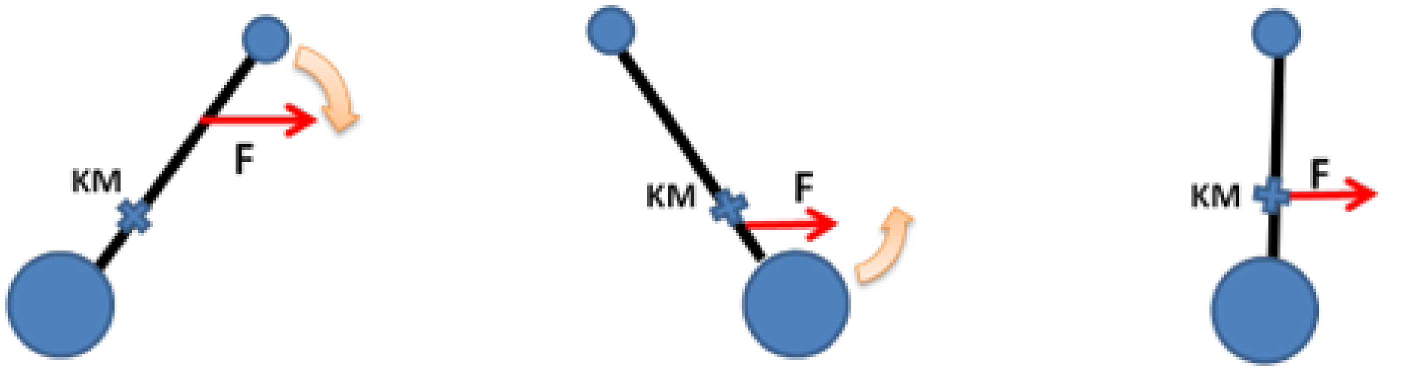
$$\tan\theta = \frac{V_{sy}}{V_{sx}} = \frac{12,5}{9,4}$$

$$\tan\theta = 1,33$$

$$\theta = \tan^{-1}(1,33) = 53,1^\circ$$

9.5 Kütle Merkezi:

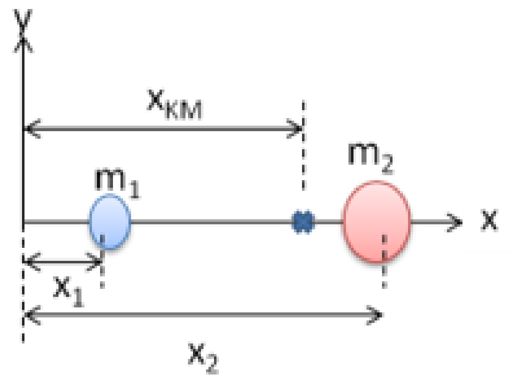
Mekanik bir sistemin bütününün hareketi, sistemin kütle merkezi olarak adlandırılan özel bir noktaya göre analiz edilebilir. Sisteme etki eden dış **F** kuvvetinin sanki kütle merkezine yerleştirilmiş M kütleli tek bir parçacığa etki ettiği düşünülebilir. Bu durumda F dış kuvveti etkisi altında olan M kütleli bir cismin kütle merkezi **a= F/M** ivmesi ile hareket eder. Hafif katı bir çubukla bağlanmış parçacık çiftinden oluşan mekanik bir sistem ele alalım. Kütle merkezi parçacıkları birbirine bağlayan çizgi üzerinde bir yerde ve büyük kütleye daha yakındır. Eğer küçük kütleye yakın bir bölgeye dış F kuvveti uygulanırsa sistem saat yönünde döner. Kuvvet büyük kütleye yakın bir bölgeye uygulanırsa sistem saat yönünün tersi yönde döner. Kuvvet kütle merkezine uygulanırsa ise sistem dönmeden uygulanan kuvvet yönünde ilerler.



Aşağıda verilen parçacık çiftinin kütle merkezinin koordinatlarını bulalım.

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1 + m_2)}$$

Örneğin; $x_1 = 0, \quad x_2 = d \quad ve \;\; m_2 = 2m_1$ değerleri için kütle merkezi $x_{KM} = \frac{2d}{3}$ olur. Yani ağır olan cisme daha yakındır.



Kütle merkezi kavramını üç boyutta çok parçacıklı sistem için genelleyebiliriz. n parçacıklı bir sistemin kütle merkezinin koordinatı

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{(m_1 + m_2 + \cdots + m_n\,)} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

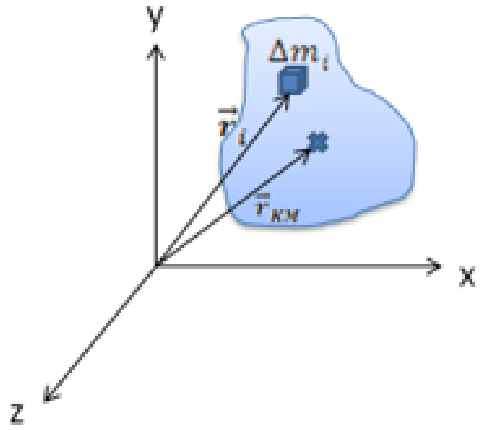
olarak tanımlanır. Kütle merkezinin y ve z koordinatları ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_{KM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad ve \qquad z_{KM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Üç boyutta kütle merkezinin yeri $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{KM}}$ konum vektörü ile gösterilir.

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{KM}} = x_{KM}\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_{KM}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z_{KM}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Katı bir cismin kütle merkezini bulmak için bu cismin çok sayıda küçük parçacıklardan oluştuğu düşünülebilir. Parçacıklar arası mesafe çok çok küçük olduğundan cismin sürekli bir dağılıma sahip olduğu varsayımı yapılabilir.



Katı cisim üzerindeki bir çok küçük Δm_i parçacığının koordinatları x_i , y_i ve z_i ise, kütle merkezinin x koordinatı için

$$x_{KM} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{M}$$

Katı cisim üzerindeki bir çok küçük Δm_i parçacığının koordinatları x_i , y_i ve z_i ise, kütle merkezinin x koordinatı için

$$x_{KM} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{M}$$

ifadesi yazılabilir. Δm_i kütlesini sıfıra götürerek limit alınırsa, toplam işlevi yerine integral işlemi yazılabilir. Bu durumda katı bir cismin kütle merkezi için

$$x_{KM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{M} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

elde edilir. Benzer Şekilde kütle merkezinin y ve z koordinatı içinde

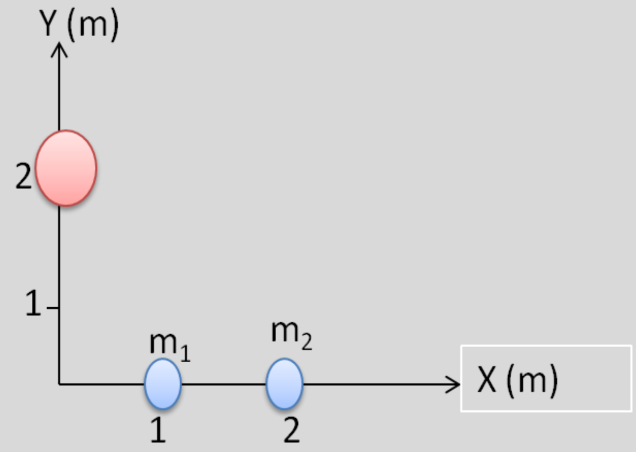
$$y_{KM} = \frac{1}{M} \int y \, dm \qquad ve \qquad z_{KM} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

yazılabilir. Katı bir cismin kütle merkezinin vektörel konumu da

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{KM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm$$

olacaktır.

Örnek 9.14: Şekilde verilen üç parçacıklı sistemin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.
(m_1=m_2= 1 kg   ve m_3=2 kg)



$$x_{KM} = \frac{\sum x_i m_i}{M} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{M}$$

$$= \frac{(1m)(1kg) + (2m)(1kg) + (0m)(2kg)}{4\ kg}$$

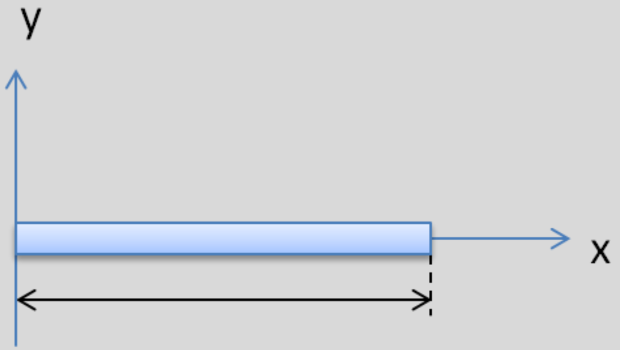
$$= \frac{3}{4} = 0,75\,m$$

$$y_{KM} = \frac{\sum y_i m_i}{M} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{M} = \frac{(0m)(1kg) + (0m)(1kg) + (2m)(2kg)}{4}$$

$$= 1m$$

$$\vec{r} = 0,75\,\hat{i} + 1\hat{j}$$

Örnek 9.15: Kütlesi M ve uzunluğu L olan düzgün çubuğun kütle merkezinin çubuğun tam orta noktasında olduğunu gösteriniz.



λ : çizgisel kütle yoğunluğu $dm = \lambda\, dx$

$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\, dm = \frac{1}{M}\int x \lambda\, dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L$$

$$= \frac{\lambda}{M}\left(\frac{L^2}{2} - 0\right) = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{\cancel{M}}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{2}}}{2\cancel{M}} = \frac{L}{2}$$

b) Çubuğun düzgün olmadığını ve çizgisel kütle yoğunluğunun $\lambda = \alpha x$ olduğunu varsayarak kütle merkezini bulunuz.

$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int x \lambda\, dx = \frac{1}{M}\int x \alpha x\, dx = \frac{\alpha}{M}\int x^2 dx$$

$$= \frac{\alpha}{M}\frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{\alpha}{M}\left(\frac{L^3}{3} - 0\right) = \frac{\alpha L^3}{3M} = \frac{\cancel{\alpha} L^{\cancel{3}}}{3}\frac{2}{\cancel{\alpha L^2}} = \frac{2L}{3}$$

$$M = \int_0^L dm = \int \lambda\, dx = \int \alpha x\, dx = \frac{\alpha x^2}{2} = \frac{\alpha L^2}{2}$$