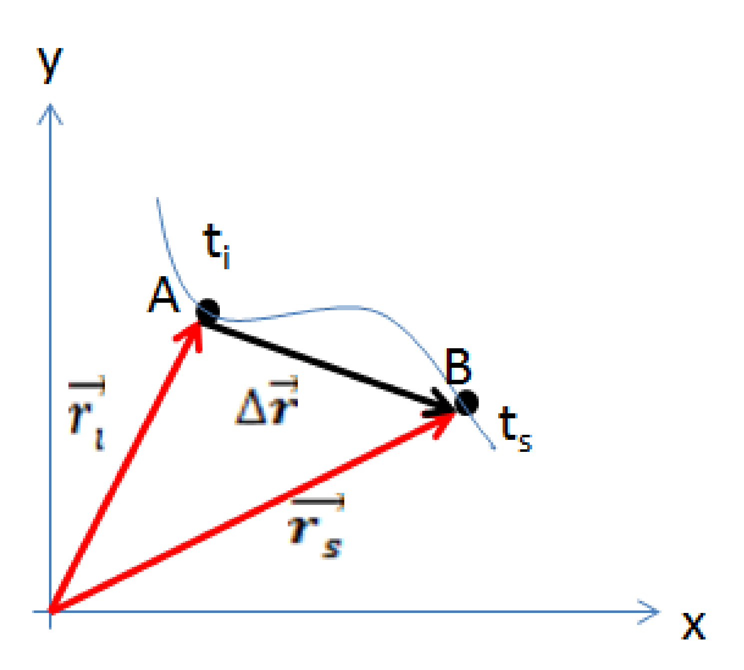
FİZİK

5.HAFTA

4. İKİ BOYUTTA HAREKET

4. 1 Yerdeğiştirme, Hız ve İvme Vektörleri

Bir önceki bölümde bir doğru boyunca yol alan bir parçacığın konumu zamanın fonksiyonu olarak bilinirse, parçacığın hareketini tümüyle belirleyebileceğimizi öğrendik. Bu bölümde ise xy düzleminde yani iki boyutta hareket eden bir parçacığın hareketini analiz etmeye çalışacağız. Bunun için öncelikle parçacığın iki boyutlu uzayda konumunu ifade edecek olan $\vec{r}$ ***konum vektörü***nü tanımlayalım. Aşağıda verilen şekildeki gibi t_i anında A noktasında ve belli bir zaman sonra t_s anında B noktasında olan bir parçacığı göz önüne alalım. Parçacık $\Delta t = t_s - t_i$ zaman aralığında A'dan B'ye hareket ederken, parçacığın konum vektörü de $\vec{r_i}$ den $\vec{r_s}$ ye değişir.



İki boyutta yerdeğiştirme vektörü $(\Delta\vec{r})$ parçacığın son konum vektörü ile ilk konum vektörü arasındaki farka eşittir.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_s} - \vec{r_i}$$

İki boyutta ortalama hız, yerdeğiştirme vektörünün Δt zaman aralığına bölümü olarak tanımlanır. Ortalama hız vektörü $\Delta\vec{r}$ vektörü ile aynı yöndedir.

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}_s} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}_i}}{t_s - t_i}$$

İki boyutta ani hız, konum vektörünün zamana göre türevidir. Ani hız vektörünün yönü ise her zaman o andaki konum vektörüne

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$$

Parçacığın aldığı yol boyunca herhangi bir noktadaki ani hız vektörünün doğrultusu, o noktada yola teğet ve hareket doğrultusu boyuncadır.

İki boyutta ortalama ivme, herhangi bir Δt zaman aralığında ani hız vektöründe meydana gelen değişimin bu zaman aralığına oranına eşittir.

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}_s} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}_i}}{t_s - t_i}$$

Ortalama ivme vektörünün yönü $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ vektörü ile aynı yöndedir.

Ani ivme ise, Δt sıfıra yaklaşırken $\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t}$ oranının limit değerine yada ani hız vektörünün zamana göre türevine eşittir.

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

4.2 İki Boyutta Sabit ivmeli Hareket

İvmenin hem büyüklükçe hem de doğrultuca sabit kaldığı iki boyutlu hareketi ele alalım. xy düzleminde hareket eden bir parçacığın konum vektörü

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

olarak yazılabilir. Burada $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ ve $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ sadece doğrultu gösteren ve zaman içinde değişmeden sabit kalan birim vektörlerdir. Parçacık hareket ederken, x,y ve r zaman içinde değişir. Parçacığın hızı,

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

biçiminde yazılabilir. Parçacığın ivme vektörü sabit olduğuna göre ivmenin hem x hem de y bileşeni (a_x ve a_y) zaman içinde değişmeden kalır. Bu durumda kinematik denklemleri hız vektörünün her iki bileşeni için de ayrı ayrı uygulanabilir.

$$\overrightarrow{v_s} = v_{sx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_{sy}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= (v_{ix} + a_x t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(v_{iy} + a_y t\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \left(v_{ix}\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_{iy}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) + \left(a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)t$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{s}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}} + \vec{\boldsymbol{a}}t$$

Sabit ivmeli hareket eden bir parçacığın x ve y koordinatları ise

$$x_s = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_s = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler kullanılarak $\vec{\boldsymbol{r}}$ konum vektörü için.

$$\vec{r_s} = x_s\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_s\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \left(x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= (x_i\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_i\hat{\boldsymbol{\jmath}}) + \left(v_{ix}\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_{iy}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)t + \frac{1}{2}\left(a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)t^2$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r_s}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r_i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_i}}\boldsymbol{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{a}}t^2$$

Örnek 4.1: Bir parçacık 20 m/s lik x bileşenli ve -15 m/s lik y bileşenli ilk hızla t=0 anında orijinden harekete geçiyor. Parçacık sadece x yönünde bileşene sahip bir ivme ile xy düzleminde hareket etmektedir.

a) Zamanın fonksiyonu olarak herhangi bir andaki hızının bileşenlerini ve toplam hız vektörünü bulunuz.
b) t=5 s'de parçacığın hızının büyüklük, yön ve doğrultusunu hesaplayınız.
c) Herhangi bir t anındaki yerdeğiştirme vektörünü bulunuz.

a)

$$V_i = (20\,m/s)\hat{i} - 15(m/s)\hat{j}$$
$$\vec{V}_s = \vec{V}_i + \vec{a}t$$
$$\vec{V}_s = (20\hat{i} - 15\hat{j}) + (4\hat{i})t$$
$$\vec{V}_s = (20 + 4t)\hat{i} - 15\hat{j} \ m/s$$

$$\vec{a} = 4\hat{i} + 0\hat{j} = 4\hat{i}$$

c)

$$\vec{r}_s = x_s\hat{i} + y_s\hat{j}$$
$$= (\overset{0}{x_i} + V_{ix}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\hat{i} + (\overset{0}{y_i} + V_{iy}t + \tfrac{1}{2}\overset{0}{\cancel{a_y}}t^2)\hat{j}$$
$$= (20t + 2t^2)\hat{i} - (15t)\hat{j}$$
$$\vec{r}_s(5s) = (20.(5) + 2(5)^2)\hat{i} - (15(5))\hat{j} = 150\hat{i} - 75\hat{j}$$

b)

b) t=5 s'de parçacığın hızının büyüklük ve doğrultusu

$$\vec{V}_s = (20 + 4.(5))\hat{i} - 15\hat{j} = 40\hat{i} - 15\hat{j}$$
$$|\vec{V}_s| = \sqrt{40^2 + 15^2} = 43\,m/s \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{15}{40}\right) = -21^\circ$$

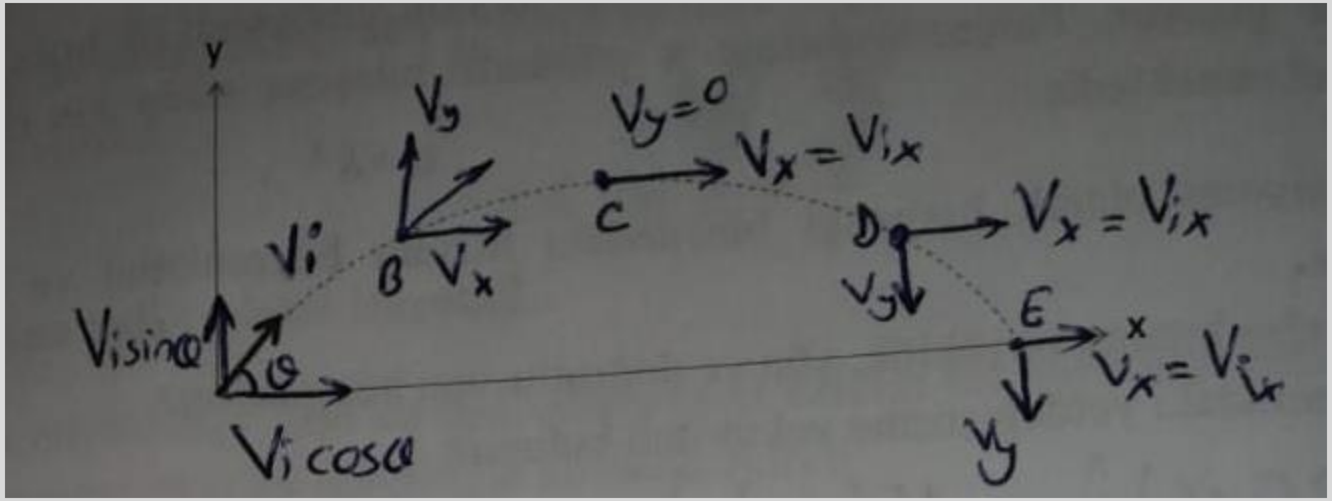
4.3 Eğik Atış Hareketi

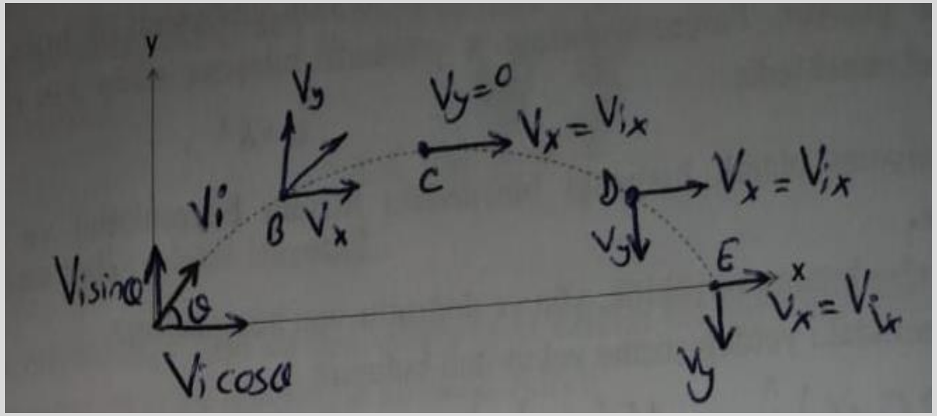
Herhangi bir nedenle yatay düzlemle bir açı yapacak şekilde yukarıya doğru fırlatılan bir nesnenin eğrisel bir yol boyunca ilerlediğini hepimiz gözlemlemişizdir. Yatay ve düşey eksenlerde gerçekleşen bu hareketi analiz edebilmek için öncelikle iki kabul yapmamız gerekmektedir.

$\vec{g}$ yerçekimi ivmesi hareket boyunca sabit kalır ve aşağıya (-y) doğru yöneliktir

Hava direnci ve sürtünmesi ihmal edilebilir.

Yatay eksen ile θ açısı yapacak şekilde yukarıya doğru v_i ilk hızı ile fırlatılan bir nesnenin hareketini analiz etmeye çalışalım. Parçacık üzerindeki etkili olan tek ivme yerçekimi ivmesi ($\vec{g}$) olacaktır. Yerçekimi ivmesi sadece y doğrultusunda bileşene sahip olduğuna göre, cisim ***y doğrultusunda sabit ivmeli hareket*** edecektir. İvmenin x bileşeni bulunmadığına göre, cisim ***x doğrultusunda sabit hızlı hareket*** edecektir.





$t=0$'da eğik atılan cismin orijini ($x_i=y_i=0$) $\vec{V_i}$ hızı ile terkettiğini varsayalım. θ atış açısıdır.

$$\cos\theta = \frac{V_{ix}}{V_i} \qquad \sin\theta = \frac{V_{iy}}{V_i} \qquad \begin{aligned} V_{ix} &= V_i\cos\theta \\ V_{iy} &= V_i\sin\theta \end{aligned}$$

Konum yerdeğiştirme vektörünün x bileşeni:

$$x_s = \underbrace{\cancel{x_i}}_{0} + V_{ix}\,t + \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{a_x}}_{0}t^2 = V_i\cos\theta\, t \Rightarrow t = \frac{x_s}{V_i\cos\theta}$$

y bileşeni için:

$$y_s = \overset{0}{\cancel{y_i}} + V_{iy}\,t - \frac{1}{2}g t^2$$

$$y_s = V_i\sin\theta\, t - \frac{1}{2}g t^2$$

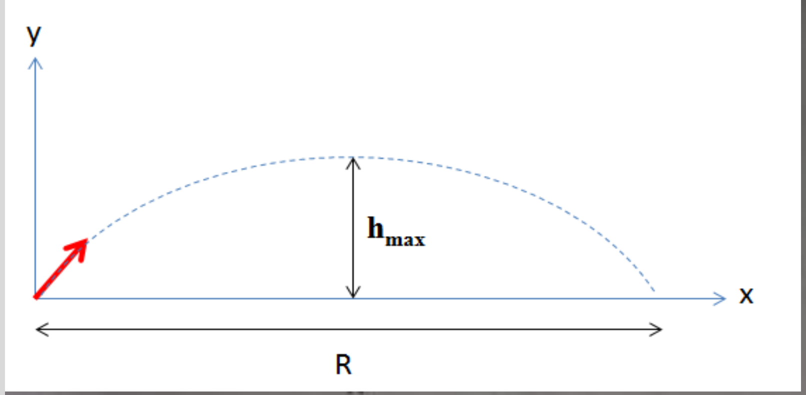
$$= \cancel{V_i}\sin\theta \frac{x_s}{\cancel{V_i}\cos\theta} - \frac{1}{2}g\frac{x_s^2}{V_i^2\cos^2\theta}$$

$$y_s = x_s\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x_s^2}{V_i^2\cos^2\theta}$$

$$\boxed{y_s = \tan\theta\, x_s - \left(\frac{g}{2V_i^2\cos^2\theta}\right)x_s^2}$$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ aralığında geçerli olan bu ifade $y=ax-bx^2$ şeklindeki parabol denklemi ile özdeştir. Bu durumda eğik olarak atılan bir cismin izlediği yolun bir parabol olduğunu söyleyebiliriz.

Eğik atılan cismin ulaşabileceği maksimum yükseklik (h_{max}):



A noktasında hızın y bileşeni $V_{Ay} = 0$'dır.

$$V_{Ay} = V_{0y} - g t_{0A}$$

$$0 = V_i \sin\theta - g t_{0A}$$

$$\boxed{t_{0A} = \frac{V_i \sin\theta}{g}}$$

$$h_{max} = y_A = \overset{0}{\cancel{y_0}} + V_{0y} t_{0A} - \frac{1}{2} g t_{0A}^2$$

$$y_A = V_i \sin\theta \left(\frac{V_i \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_i \sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{V_i^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{V_i^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Eğik atılan cismin yatay eksende aldığı yol (Menzil):

R menzili, cismin tepe noktasına ulaşmak için geçen zamanın iki katında yani $t_{OB} = 2\,t_{OA}$ zamanında alınan yatay uzaklıktır.

$$R = V_{ix}\, t_{OB}$$

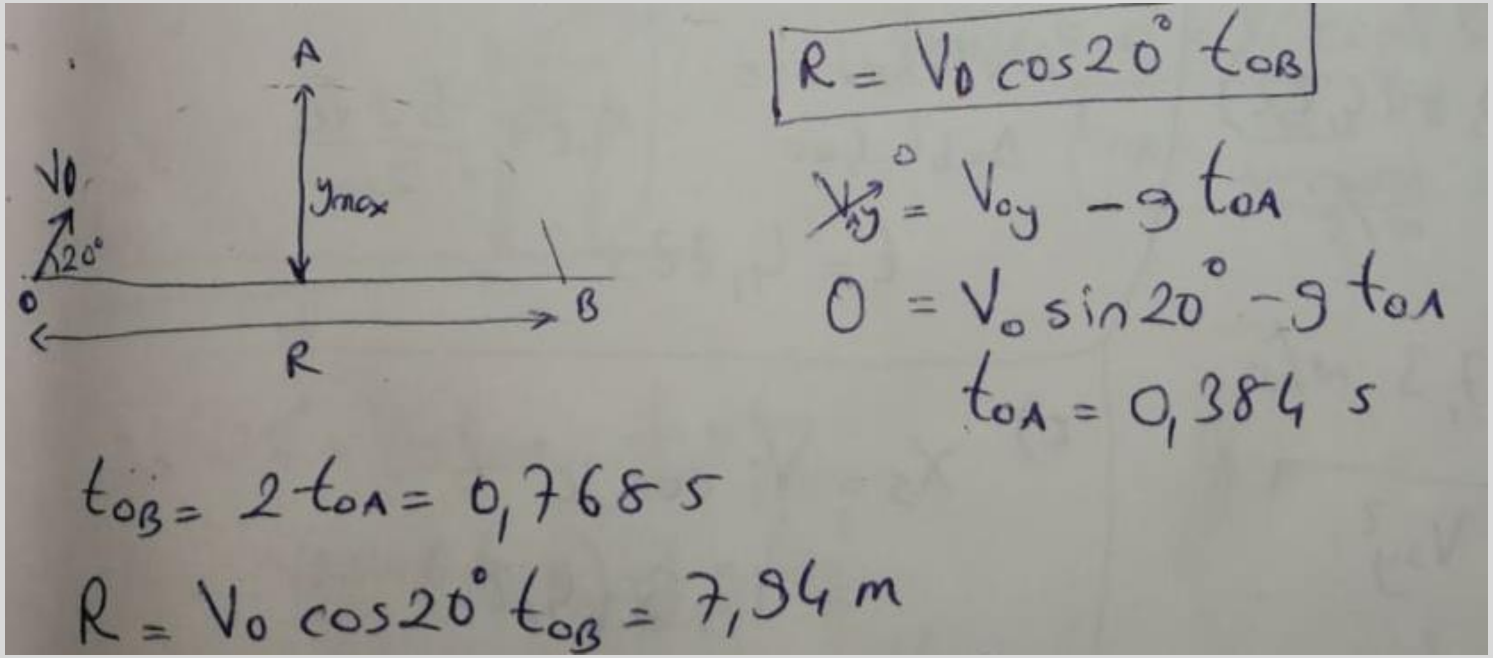
$$= V_i \cos\theta \; 2\, t_{OA}$$

$$= V_i \cos\theta \; 2\, \frac{V_i \sin\theta}{g} = \frac{V_i^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\boxed{R = \frac{V_i^2 \sin 2\theta}{g}}$$

Örnek 4.2: Uzun atlama yapan bir sporcu, yatayla 20^0 lik açı altında 11 m/s lik bir hızla fırlıyor.

a) Sporcu ne kadar yatay uzaklığa sıçrayabilir?

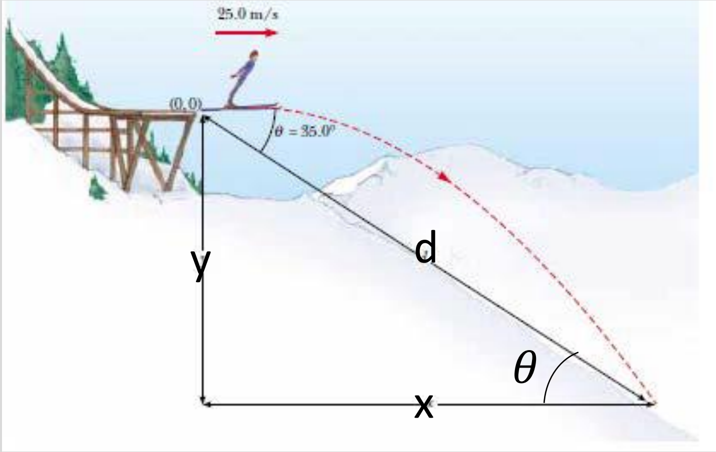


b) Ulaşabileceği maksimum yükseklik nedir?

$$y_A = y_{max} = \cancel{y_0} + V_{0y} t_{OA} - \frac{1}{2} g t_{OA}^2$$

$$= V_0 \sin\theta\ (0.384\ s) - \frac{1}{2}\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)(0.384\ s)^2 = 0.72\ m$$

Örnek 4.3: Bir kayak sporcusu, kayak pistini 25 m/s lik hızla yatay doğrultuda giderek terk eder. Aşağıya inişte 35^0 lik bir eğimle düşer. Sporcunun düştüğü noktanın koordinatlarını (x, y) hesaplayınız.



$V_{ix} = 25\ m/s$

$V_{iy} = 0\ m/s$

$x_s = V_{ix}\, t = 25t$

$x_s = d\cos 35° = 25t$

$t = \dfrac{d\cos 35°}{25}$

$y_s = \cancel{V_{iy}}\, t - \frac{1}{2} g t^2$

$\boxed{y_s = -4{,}9t^2}$

$y_s = d\sin 35° = -4{,}9t^2$

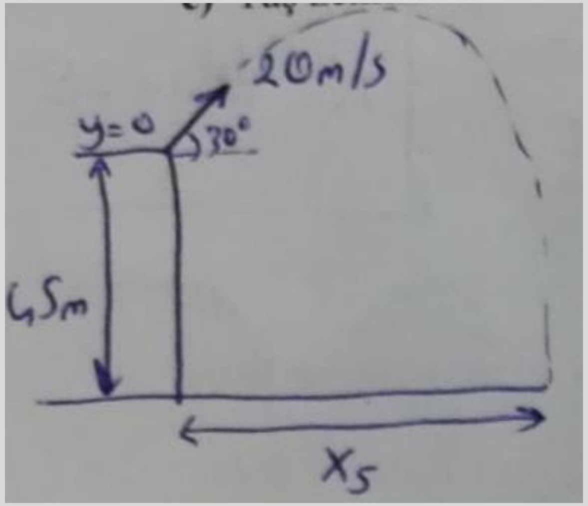
$d = 103\ m$

Örnek 4.4: Bir taş 45 m yüksekliğinde ki binanın tepesinden yatayla 30^0 lik bir açı altında ve 20 m/s lik ilk hızla yukarıya doğru fırlatılmaktadır.

a) Taş ne kadar süre havada kalır?

b) Zemine çarpmadan hemen önce taşın hızının büyüklüğünü bulunuz.

c) Taş zemine nerede çarpar?



a) $V_{ix} = V_i \cos 30^\circ = 17{,}3 \text{ m/s}$

$V_{iy} = V_i \sin 30^\circ = 10 \text{ m/s}$

$x_s = V_i \cos 30^\circ \, t$

$y_s = V_i \sin 30^\circ \, t - \frac{1}{2} g t^2$

$-45 = 10t - 4{,}9t^2$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$t = 4{,}22 s$

b) $V_{ys} = V_{iy} - gt$

$= 10 - 9{,}8(4{,}22)$

$= -31{,}4 \text{ m/s}$

$V_{sx} = V_{ix} = 17{,}3 \text{ m/s}$

$V_s = \sqrt{V_{sx}^2 + V_{sy}^2}$

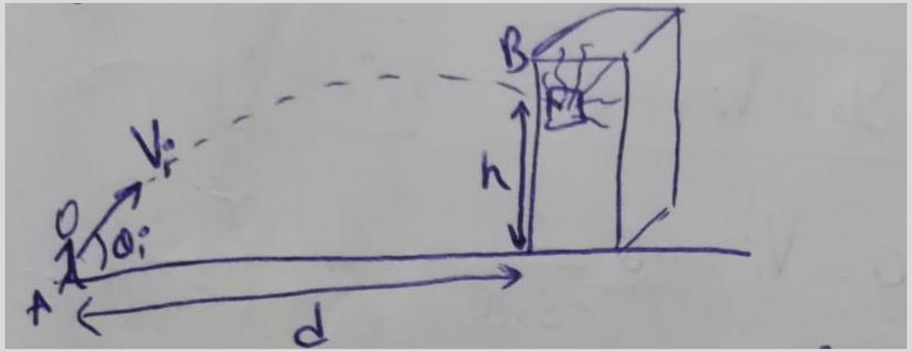
$= 35{,}9 \text{ m/s}$

c) $X_s = V_i \cos 30^\circ \, t$

$= 17{,}3(4{,}22)$

$= 73 m$

Örnek 4.5: Yanan bir binadan d kadar uzaklıkta bulunan bir itfayeci, hortumun ağzından çıkan tazyikli suyu şekildeki gibi yatayın üstünde θ açısında sıkmaktadır. Suyun hızı v_i ise su hangi h yüksekliğinde binaya çarpar?



$$x_{menzil} = d = V_i \cos\theta \, t_{AB}$$

$$\boxed{t_{AB} = \frac{d}{V_i \cos\theta}}$$

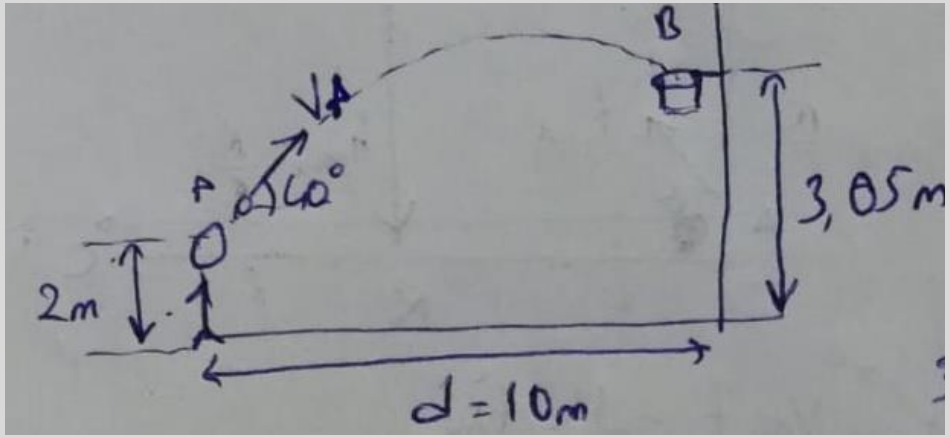
$$y_s = \cancel{y_i}^{0} + V_{iy} t_{AB} - \frac{1}{2} g t_{AB}^2$$

$$h = V_i \sin\theta \, t_{AB} - \frac{1}{2} g t_{AB}^2$$

$$h = V_i \sin\theta \frac{d}{V_i \cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_i^2 \cos^2\theta}$$

$$h = d \tan\theta - \frac{g d^2}{2 V_i^2 \cos^2\theta}$$

Örnek 4.6: 2 m boyundaki bir basketbolcu potadan 10 m uzakta ayakta durmaktadır. Sporcu topu yatayla 40^0 lik bir açı ile atarsa, topun arka panoya çarpmadan çemberden geçmesi için hangi ilk hızla atmalıdır? Potanın yüksekliği 3,05 m'dir.



$$x_{menzil} = d = V_A \cos\theta \, t_{AB}$$

$$y_B = y_A + V_{Ay} t_{AB} - \frac{1}{2} g t_{AB}^2$$

$$3,05 = 2 + V_A \sin\theta \, t_{AB} - 4,9 \, t_{AB}^2$$

$$1,05 = \cancel{V_A} \sin\theta \, \frac{d}{\cancel{V_A} \cos\theta} - 4,9 \, \frac{10^2}{V_A^2 \cos^2\theta}$$

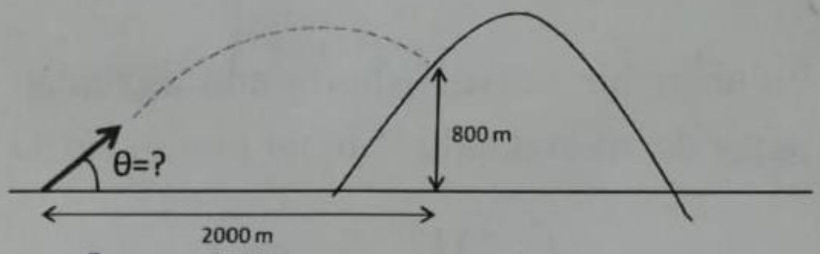
$$1,05 = 10 \tan 40° - \frac{490}{V_A^2 \, 0,59}$$

$$1,05 = 10 . (0,84) - \frac{830,5}{V_A^2}$$

$$V_A^2 = 113$$

$$V_A = 10,6 \text{ m/s}$$

Örnek 4.7: Namlu hızı 1000 m/s olan bir top bir dağın yamacında çığ başlatmak için kullanılacaktır. Hedef toptan yatay 2000 m ve yukarıya doğru 800 m uzaktadır. Hedefi vurabilmek için top yatayın yukarısında hangi açı ile ateşlenmelidir?



$$x_s = \cancel{x_i}^{\,0} + V_{ix}\, t$$

$$x_s = V_i \cos\theta\, t$$

$$2000\,m = (1000\,m/s) \cos\theta\, t$$

$$\boxed{t = \frac{2}{\cos\theta}}$$

$$y_s = \cancel{y_i}^{\,0} + V_{iy}\, t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_s = V_i \sin\theta\, t - \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$$

$$\boxed{y_s = V_i \sin\theta\, t - 4{,}9 t^2}$$

$$800 = V_i \sin\theta \frac{2}{\cos\theta} - 4{,}9 \left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^2$$

$$800 \cos^2\theta = 2000 \sin\theta \cos\theta - 19{,}6$$

$$19{,}6 + 800 \cos^2\theta = 2000 \sqrt{1-\cos^2\theta}\, \cos\theta$$

$$\theta_1 = 22{,}4^\circ \text{ veya } \theta_2 = 89{,}4^\circ$$

Örnek 4.8: Bir otomobil eğim açısının 37^0 olduğu dik bir yamaca park eder. Unutkan sürücü arabasını boşta bırakır ve el freni de tutmamaktadır. Otomobil 4 m/s^2 lik sabit bir ivmeyle, dik bir uçurumun kenarına doğru 50 m yol alarak, bayırdan aşağıya sükunetten itibaren yuvarlanır. Uçurumun yüksekliği okyanustan 30 m'dir.

a) Uçurumun kenarına ulaştığı zaman otomobilin hızını ve oraya gelmesi için geçen süreyi
b) Okyanusa düştüğü anda arabanın hızını,
c) Arabanın hareket halinde olduğu toplam zamanı,
d) Otomobilin okyanusa düştüğü anda, uçurumun dibine göre konumunu bulunuz.