FİZİK

4.HAFTA

3.5. Serbest Düşme

Herhangi bir yükseklikten serbest bırakılan bütün cisimler neredeyse sabit bir ivme ile hızlanarak yere doğru düşerler. Serbest bırakılan bütün cisimler, hava direnci ve sürtünme ihmal edildiği için cismin yoğunluk, şekil ve kütlesinden bağımsız olarak eşit ivme ile hareket ederler. Yerin kütle çekiminden kaynaklanan bu ivmeye ***yerçekimi ivmesi*** denir. Büyüklüğü 9.8 m/s^2 olan yerçekimi ivmesi $\vec{\boldsymbol{g}}$ ile gösterilir ve yönü her zaman yere (aşağıya) doğrudur.

Serbest düşme olayı tek boyutta sabit ivmeli harekete verilebilecek en güzel örnektir. Hareket boyunca cismin ivmesi sabit olduğundan, bir önceki kısımda öğrendiğimiz sabit ivmeli hareket denklemleri bu süreç için de geçerli olacaktır. Şimdi ivme yerine yerçekimi ivmesini yerleştirerek sabit ivmeli hareket denklemlerini yeniden yazalım.

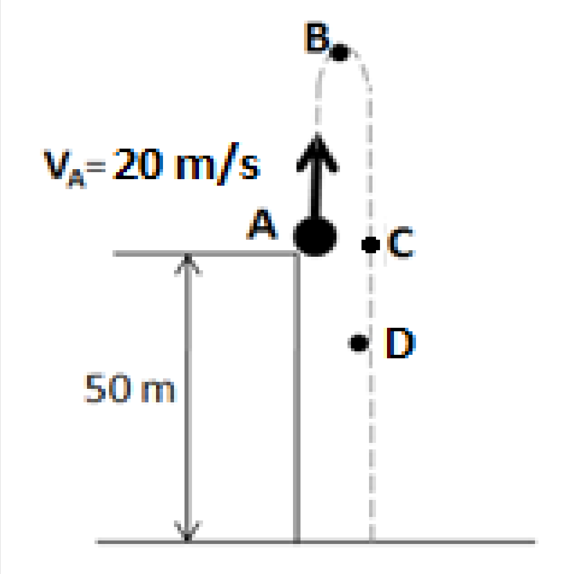
$$V_s = V_i - gt$$

$$y_s = y_i + V_i t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$V_s{}^2 = V_i{}^2 - 2g(y_s - y_i)$$

Örnek 3.12: Bir taş 50 m yüksekliğindeki bir binanın tepesinden 20 m/s hız ile yukarıya doğru fırlatılmaktadır.

a) Taşın maksimum yüksekliğe çıkması için geçen zamanı,
b) Taşın çıkabileceği maksimum yüksekliği,
c) Taş yere düşerken atıldığı noktadan ne kadar süre sonra geçer?
d) Bu anda taşın hızı nedir?
e) t=5 s'de taşın konumunu ve hızını bulunuz.



a) $V_B = V_A - gt$

$0 = 20 - 9,8t$

$t = 2,04 s$

b) $y_B = \cancel{y_A}^{0} + V_A t - \frac{1}{2} g t^2$

$y_B = 20.(2,04) - \frac{1}{2} 9,8 (2$

$y_B = 20,4 \ m$

c) $\cancel{y_C}^{0} = \cancel{y_A}^{0} + V_A t - \frac{1}{2} g t^2$

$0 = 20t - \frac{1}{2} 9,8 t^2$

$20 = 4,9t$

$t = \frac{20}{4,9} = 4,08 s$

d) $V_C = V_A - g t_{AC}$

$V_C = 20 - 9,8(4,08)$

$= -20 \ m/s$

e) $V_D = V_B - gt = 0 - (9,8)(5 - 2,04) = -29 \ m/s$

$V_D = V_A - gt = 20 - (9,8)\ 5 = -\underset{25}{29} \ m/s$

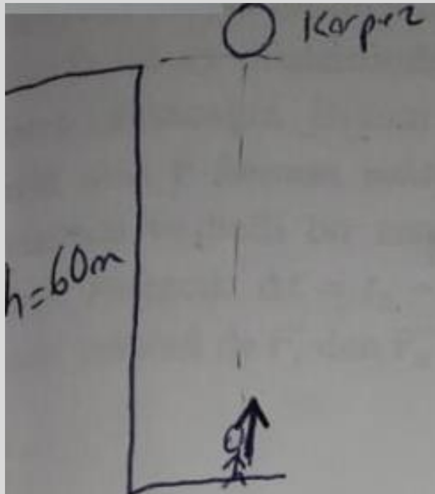
$y_D = \cancel{y_C}^{0} + V_C t - \frac{1}{2} g t^2$

$= (-20)(5 - 4,08) - \frac{1}{2} 9,8 (5 - 4,08)^2 = -22,5 \ m$

Örnek 3.13: Yüksekliği 60 m olan bir binanın tepesinden bir karpuzun serbest bırakıldığını düşünelim. Tam aşağıda bulunan bir okçu ise karpuza doğru 20 m/s lik ilk hız ile bir ok fırlatıyor olsun.

a) Ne kadar süre sonra ok karpuza çarpar?

b) Bu çarpışma okçunun ne kadar yukarısında gerçekleşir?



Karpuz için

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Ok için

$$y = 0 + V_i t - \frac{1}{2}gt^2$$

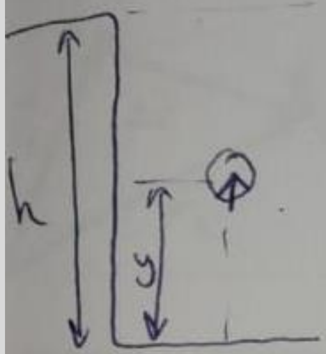
Son konumları eşit olacağına göre

a)

$$h - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} = V_i t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2}$$

$$h = V_i t$$

$$t = \frac{h}{V_i} = \frac{60}{20} = 3s$$



b)

$$y = V_i t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = (20)(3) - \frac{1}{2}9{,}8(3)^2 = 60 - 44{,}1 = 15{,}9\,m$$

Örnek 3.14: Bir helikopterin yerden yüksekliği $y = 3t^2$ ile veriliyor. t=2 s anında helikopterden bir paket serbest bırakılıyor.

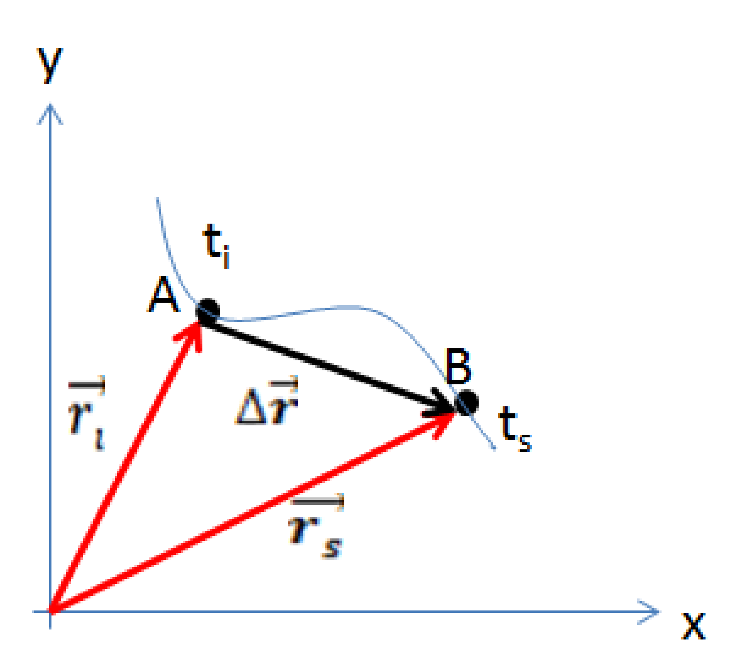
a) Paket ne kadar zamanda yere ulaşır?

b) Paket yere ulaştığı anda hızının büyüklüğü kaç m/s'dir?

4. İKİ BOYUTTA HAREKET

4. 1 Yerdeğiştirme, Hız ve İvme Vektörleri

Bir önceki bölümde bir doğru boyunca yol alan bir parçacığın konumu zamanın fonksiyonu olarak bilinirse, parçacığın hareketini tümüyle belirleyebileceğimizi öğrendik. Bu bölümde ise xy düzleminde yani iki boyutta hareket eden bir parçacığın hareketini analiz etmeye çalışacağız. Bunun için öncelikle parçacığın iki boyutlu uzayda konumunu ifade edecek olan $\vec{r}$ ***konum vektörü***nü tanımlayalım. Aşağıda verilen şekildeki gibi t_i anında A noktasında ve belli bir zaman sonra t_s anında B noktasında olan bir parçacığı göz önüne alalım. Parçacık $\Delta t = t_s - t_i$ zaman aralığında A'dan B'ye hareket ederken, parçacığın konum vektörü de $\vec{r_i}$ den $\vec{r_s}$ ye değişir.



İki boyutta yerdeğiştirme vektörü ($\Delta\vec{r}$) parçacığın son konum vektörü ile ilk konum vektörü arasındaki farka eşittir.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_s} - \vec{r_i}$$

İki boyutta ortalama hız, yerdeğiştirme vektörünün Δt zaman aralığına bölümü olarak tanımlanır. Ortalama hız vektörü $\Delta\vec{r}$ vektörü ile aynı yöndedir.

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}_s} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}_i}}{t_s - t_i}$$

İki boyutta ani hız, konum vektörünün zamana göre türevidir. Ani hız vektörünün yönü ise her zaman o andaki konum vektörüne

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$$

Parçacığın aldığı yol boyunca herhangi bir noktadaki ani hız vektörünün doğrultusu, o noktada yola teğet ve hareket doğrultusu boyuncadır.

İki boyutta ortalama ivme, herhangi bir Δt zaman aralığında ani hız vektöründe meydana gelen değişimin bu zaman aralığına oranına eşittir.

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{v_s}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v_i}}}{t_s - t_i}$$

Ortalama ivme vektörünün yönü $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ vektörü ile aynı yöndedir.

Ani ivme ise, Δt sıfıra yaklaşırken $\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t}$ oranının limit değerine yada ani hız vektörünün zamana göre türevine eşittir.

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

4.2 İki Boyutta Sabit ivmeli Hareket

İvmenin hem büyüklükçe hem de doğrultuca sabit kaldığı iki boyutlu hareketi ele alalım. xy düzleminde hareket eden bir parçacığın konum vektörü

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

olarak yazılabilir. Burada $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ ve $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ sadece doğrultu gösteren ve zaman içinde değişmeden sabit kalan birim vektörlerdir. Parçacık hareket ederken, x,y ve r zaman içinde değişir. Parçacığın hızı,

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

biçiminde yazılabilir. Parçacığın ivme vektörü sabit olduğuna göre ivmenin hem x hem de y bileşeni (a_x ve a_y) zaman içinde değişmeden kalır. Bu durumda kinematik denklemleri hız vektörünün her iki bileşeni için de ayrı ayrı uygulanabilir.

$$\overrightarrow{v_s} = v_{sx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_{sy}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= (v_{ix} + a_x t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(v_{iy} + a_y t\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \left(v_{ix}\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_{iy}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) + \left(a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)t$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v_s}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v_i}} + \vec{\boldsymbol{a}}t$$

Sabit ivmeli hareket eden bir parçacığın x ve y koordinatları ise

$$x_s = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_s = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler kullanılarak $\vec{\boldsymbol{r}}$ konum vektörü için.

$$\vec{r_s} = x_s\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_s\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \left(x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= (x_i\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_i\hat{\boldsymbol{\jmath}}) + \left(v_{ix}\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_{iy}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)t + \frac{1}{2}\left(a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)t^2$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r_s}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r_i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_i}}\boldsymbol{t} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\vec{\boldsymbol{a}}t^2$$

Örnek 4.1: Bir parçacık 20 m/s lik x bileşenli ve -15 m/s lik y bileşenli ilk hızla t=0 anında orijinden harekete geçiyor. Parçacık sadece x yönünde bileşene sahip bir ivme ile xy düzleminde hareket etmektedir.

a) Zamanın fonksiyonu olarak herhangi bir andaki hızının bileşenlerini ve toplam hız vektörünü bulunuz.
b) t=5 s'de parçacığın hızının büyüklük, yön ve doğrultusunu hesaplayınız.
c) Herhangi bir t anındaki yerdeğiştirme vektörünü bulunuz.

a)

$$V_i = (20\,m/s)\hat{i} - 15(m/s)\hat{j}$$
$$\vec{V}_s = \vec{V}_i + \vec{a}t$$
$$\vec{V}_s = (20\hat{i} - 15\hat{j}) + (4\hat{i})t$$
$$\vec{V}_s = (20 + 4t)\hat{i} - 15\hat{j} \ \ m/s$$

$$\vec{a} = 4\hat{i} + 0\hat{j} = 4\hat{i}$$

c)

$$\vec{r}_s = x_s\hat{i} + y_s\hat{j}$$
$$= (\cancel{x_i}^{\,0} + V_{ix}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\hat{i} + (\cancel{y_i}^{\,0} + V_{iy}t + \tfrac{1}{2}\cancel{a_y}^{\,0} t^2)\hat{j}$$
$$= (20t + 2t^2)\hat{i} - (15t)\hat{j}$$
$$\vec{r}_s(5s) = (20.(5) + 2(5)^2)\hat{i} - (15(5))\hat{j} = 150\hat{i} - 75\hat{j}$$

b)

b) t=5 s'de parçacığın hızının büyüklük ve doğrultusu

$$\vec{V}_s = (20 + 4.(5))\hat{i} - 15\hat{j} = 40\hat{i} - 15\hat{j}$$
$$|\vec{V}_s| = \sqrt{40^2 + 15^2} = 43\,m/s \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{15}{40}\right) = -21^\circ$$

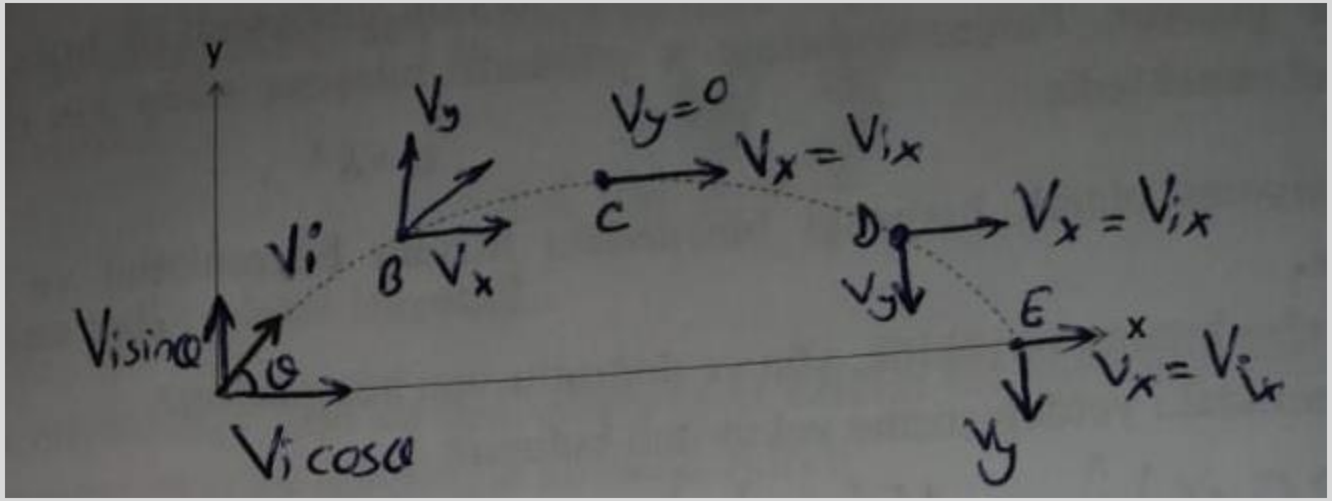
4.3 Eğik Atış Hareketi

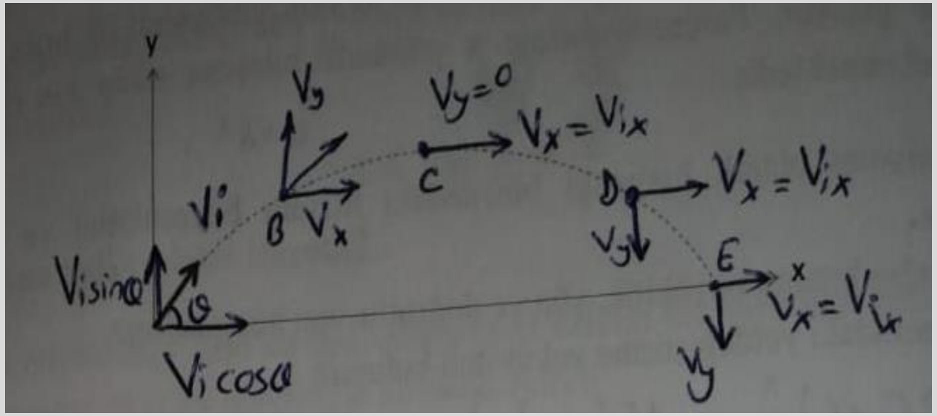
Herhangi bir nedenle yatay düzlemle bir açı yapacak şekilde yukarıya doğru fırlatılan bir nesnenin eğrisel bir yol boyunca ilerlediğini hepimiz gözlemlemişizdir. Yatay ve düşey eksenlerde gerçekleşen bu hareketi analiz edebilmek için öncelikle iki kabul yapmamız gerekmektedir.

$\vec{g}$ yerçekimi ivmesi hareket boyunca sabit kalır ve aşağıya (-y) doğru yöneliktir

Hava direnci ve sürtünmesi ihmal edilebilir.

Yatay eksen ile θ açısı yapacak şekilde yukarıya doğru v_i ilk hızı ile fırlatılan bir nesnenin hareketini analiz etmeye çalışalım. Parçacık üzerindeki etkili olan tek ivme yerçekimi ivmesi ($\vec{g}$) olacaktır. Yerçekimi ivmesi sadece y doğrultusunda bileşene sahip olduğuna göre, cisim ***<u>y doğrultusunda sabit ivmeli hareket</u>*** edecektir. İvmenin x bileşeni bulunmadığına göre, cisim ***<u>x doğrultusunda sabit hızlı hareket</u>*** edecektir.





$t=0$'da eğik atılan cismin orijini ($x_i = y_i = 0$) $\vec{V_i}$ hızı ile terkettiğini varsayalım. θ atış açısıdır.

$$\cos\theta = \frac{V_{ix}}{V_i} \qquad \sin\theta = \frac{V_{iy}}{V_i} \qquad V_{ix} = V_i \cos\theta \qquad V_{iy} = V_i \sin\theta$$

Konum yerdeğiştirme vektörünün x bileşeni:

$$x_s = \underbrace{\cancel{x_i}}_{0} + V_{ix}\, t + \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{a_x}}_{0}\, t^2 = V_i \cos\theta\, t \Rightarrow t = \frac{x_s}{V_i \cos\theta}$$

y bileşeni için:

$$y_s = \overset{0}{\cancel{y_i}} + V_{iy}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_s = V_i \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

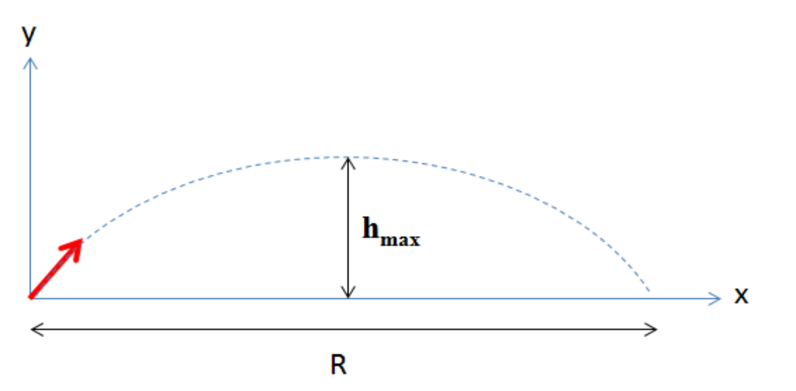
$$= \cancel{V_i} \sin\theta \frac{x_s}{\cancel{V_i} \cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x_s^2}{V_i^2 \cos^2\theta}$$

$$y_s = x_s \tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{x_s^2}{V_i^2 \cos^2\theta}$$

$$\boxed{y_s = \tan\theta\, x_s - \left(\frac{g}{2 V_i^2 \cos^2\theta}\right) x_s^2}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ aralığında geçerli olan bu ifade $y=ax-bx^2$ şeklindeki parabol denklemi ile özdeştir. Bu durumda eğik olarak atılan bir cismin izlediği yolun bir parabol olduğunu söyleyebiliriz.

Eğik atılan cismin ulaşabileceği maksimum yükseklik (h_{max}):



A noktasında hızın y bileşeni $V_{Ay} = 0$'dır.

$$V_{Ay} = V_{oy} - g t_{oA}$$

$$0 = V_i \sin\theta - g t_{oA}$$

$$\boxed{t_{oA} = \frac{V_i \sin\theta}{g}}$$

$$h_{max} = y_A = \cancel{y_0}^{\,0} + V_{oy} t_{oA} - \frac{1}{2} g t_{oA}^2$$

$$y_A = V_i \sin\theta \left(\frac{V_i \sin\theta}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_i \sin\theta}{g} \right)^2 = \frac{V_i^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{V_i^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Eğik atılan cismin yatay eksende aldığı yol (Menzil):

R menzili, cismin tepe noktasına ulaşmak için geçen zamanın iki katında yani $t_{OB} = 2\,t_{OA}$ zamanında alınan yatay uzaklıktır.

$$R = V_{ix}\, t_{OB}$$

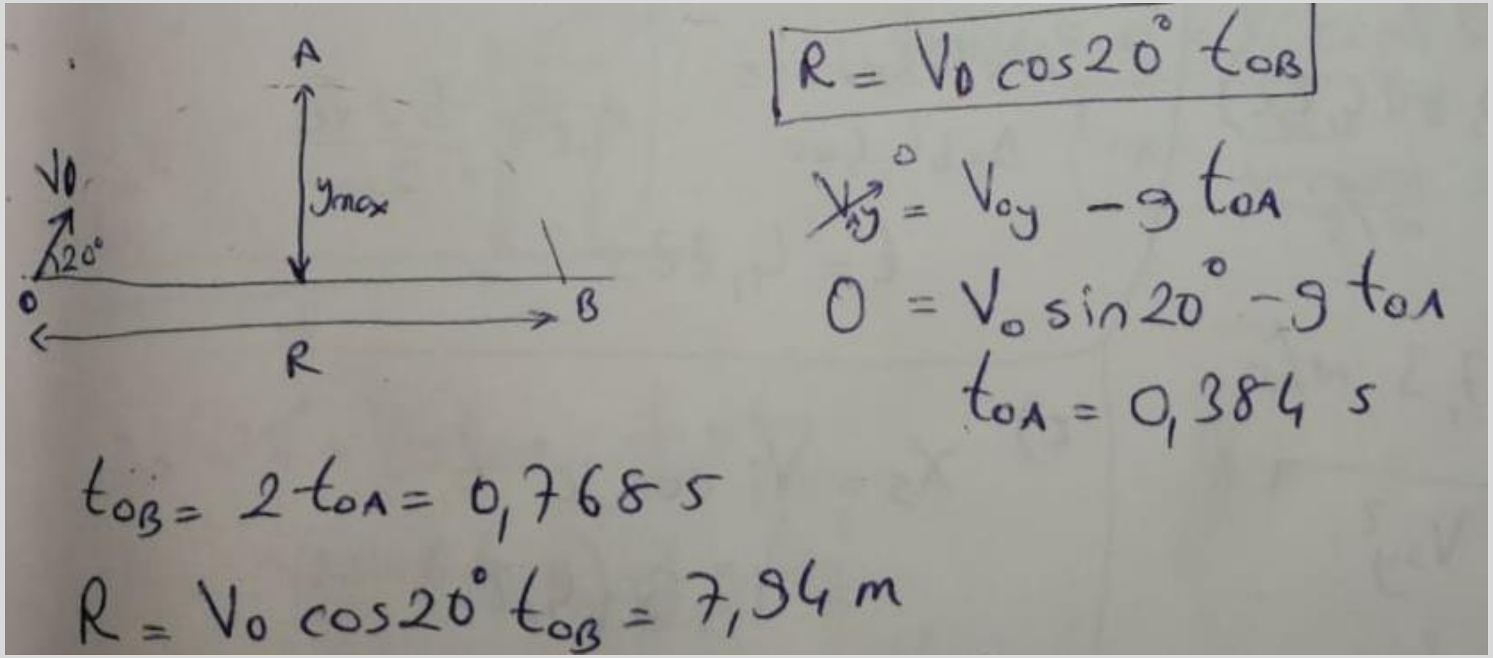
$$= V_i \cos\theta \; 2\, t_{OA}$$

$$= V_i \cos\theta \; 2\, \frac{V_i \sin\theta}{g} = \frac{V_i^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\boxed{R = \frac{V_i^2 \sin 2\theta}{g}}$$

Örnek 4.2: Uzun atlama yapan bir sporcu, yatayla 20^0 lik açı altında 11 m/s lik bir hızla fırlıyor.

a) Sporcu ne kadar yatay uzaklığa sıçrayabilir?



b) Ulaşabileceği maksimum yükseklik nedir?

$$y_A = y_{max} = \cancel{y_0} + V_{0y} t_{OA} - \frac{1}{2} g t_{OA}^2$$

$$= V_0 \sin\theta \,(0.384\ s) - \frac{1}{2}\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)(0.384\ s)^2 = 0.72\ m$$